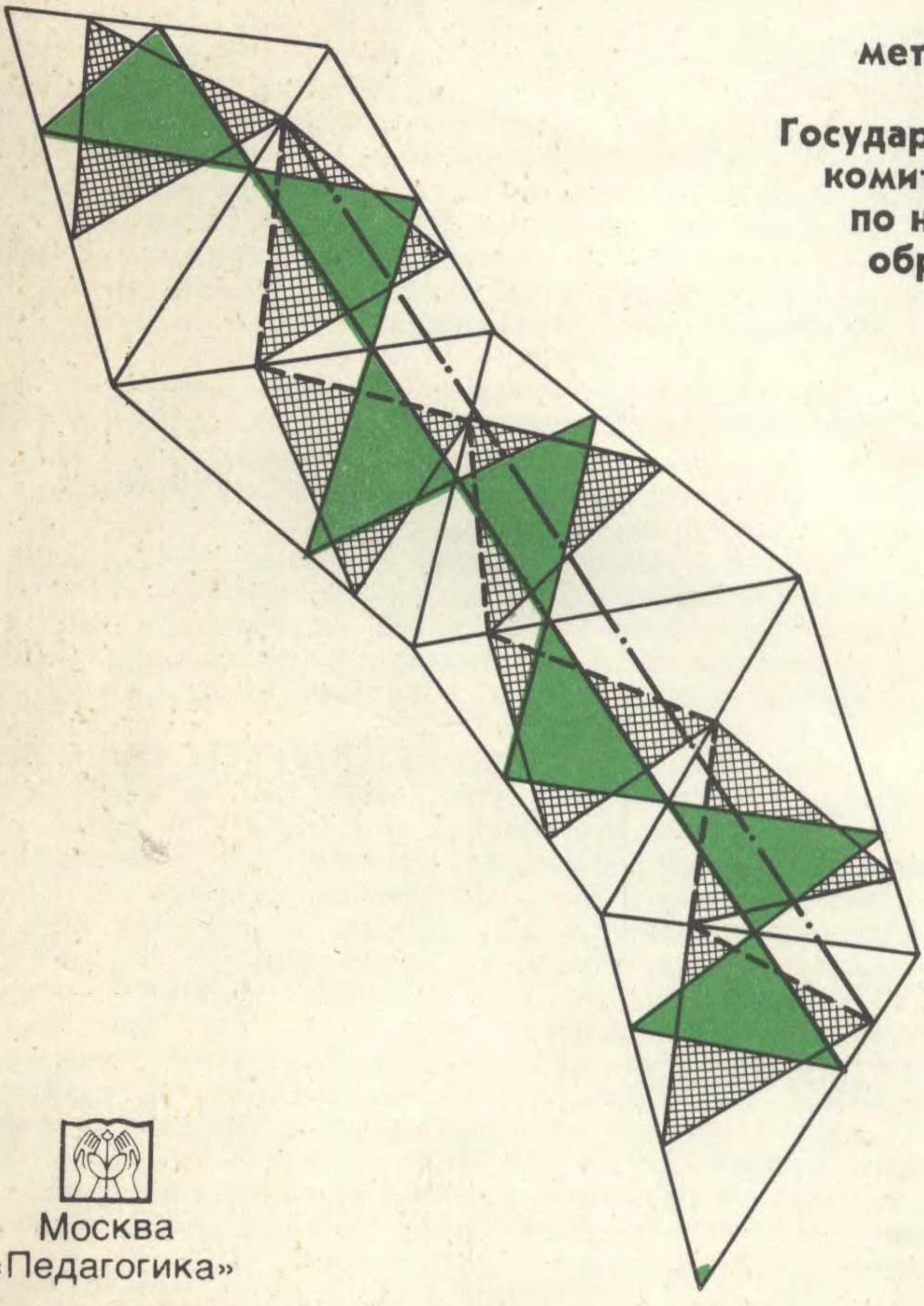
ISSN 0130—9358

# МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

5-89

Научно-методический журнал Государственного комитета СССР по народному образованию



Москва
«Педагогика»

## Книга по арифметике Яна Видмана

О Яне Видмане известно немного. Он уроженец чешского города Хеба, выходец из небогатой семьи. Родился в 1460 г., умер в первой половине XVI в. Учился в Лейпцигском университете. Здесь же затем и преподавал. В 1482 г. стал бакалавром, в 1485 — магистром свободных искусств. Он был первым, кто начал читать в Лейпцигском университете лекции по алгебре.

Пятьсот лет назад в Лейпциге вышла в свет книга Видмана «Быстрый и красивый счет для всего купечества» (1489), ставшая широко известной тем, что в ней впервые в печати появились знаки «+» и «—».

Тенденция к сокращению математических записей берет начало в эллинической науке. Еще Аристотель вводил обозначения для параметров, но они были привязаны к данному предложению. В следующем предложении тот же параметр мог обозначаться уже другой буквой. Стабильные буквенные обозначения для неизвестных и нескольких его степеней практиковал Диофант. Он же употреблял специальный знак для вычитания. Знак сложения Диофанту был не нужен, так как в то время числа, записанные рядом, считались слагаемыми. (Это понимание и сейчас по традиции сохраняется в записи смешанных чисел.)

Буквенные обозначения для неизвестных и параметров встречаются и в средневековых рукописях. В Европе XIII в. их широко применял И. Неморарий. Но математическая формула у него еще не появилась, поскольку он не использовал знаков операций. Например, Неморарий писал: «умножим $a$ на $b$, получим $c$» и т. д.

С появлением специальных знаков, обозначающих операции, начинается символическая математика. В Европе XIV—XV вв. операция сложения передавалась сначала знаком «*p*» (от слова *plus* — больше), а операция вычитания — знаком «*m*» (*minus* — меньше, отнять). Существует гипотеза, что знаки «—» и «+» заимствованы из торговой практики. Убыль товара на определенное число мер обозначали соответствующим числом горизонтальных черточек на таре, а восполнение товара в той же таре на столько-то мер вызывало естественное перечеркивание нужного числа черточек. Правдоподобна также гипотеза, выводящая знак «+» из написания буквы *t* в слове *et* (и, да).

Сам Видман, однако, еще не трактовал этот знак как обозначение оператора, но относился к нему лишь как к заменителю слова «и». Он употреблял этот знак и без связи с числами, например, писал в заголовке: «Правила увеличения + уменьшения».

Распространение знаков для обозначения неизвестных, параметров и операторов именно в XV—XVI вв. объясняется появлением книгопечатания, что позволило унифицировать математические записи. Показательно, что один из первых издателей сочинений по математике — Региомонтан — ввел точку как знак умножения, хотя в обозначении этой операции еще долго сохранялся большой разнобой. (Вспомним, что именно Региомонтан разыскал рукописи Диофанта, по ним он ознакомился с символикой великого древнего математика. См. № 4-89.) В XV в. в Европе был изобретен принцип изображения любых степеней с натуральными показателями. Это сделал Н. Орем. Знак деления — горизонтальная черточка — заимствован у арабов еще в XIII в.

*(Продолжение см. далее в этом номере.)*

Научно-методический журнал Государственного комитета СССР по народному образованию

# МАТЕМАТИКА 5·89 В ШКОЛЕ

Москва «Педагогика»
Издается с мая 1934 года
Выходит один раз в два месяца

СЕНТЯБРЬ—ОКТЯБРЬ

## СОДЕРЖАНИЕ

---



Сдано в набор 9.08.89
Подписано в печать 12.09.89.
Формат 84×108 1/32. Печать высокая.
Бумага тип № 2. Усл. печ. л. 8,4.
Усл. кр.-отт 9,24. Уч.-изд. л. 11,62.
Тираж 457 255 экз. Заказ 6170.
Цена 45 коп.

Издательство "Педагогика"
Академии педагогических наук СССР
и Государственного комитета СССР
по печати.

*Адрес издательства:*
107847, Москва, ГСП, Б-05,
Лефортовский пер., д. 8.

Адрес редакции: 129278.
Москва, ул. Павла Корчагина, д. 7
Телефон 283-85-83.

Набрано в ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате
Государственного комитета СССР по печати. 142300, г Чехов, Московской обл.

Отпечатано в Московской типографии № 13 ПО «Периодика» Государственного комитета по печати. 107005, Москва, Денисовский пер., д. 30. Заказ 259

# Проблемы реформы математического образования

◆

Ясно, что школу нельзя перестроить в один миг. Однако переходный период слишком затянулся и вызывает немалые нарекания учителей. Нововведения носят пока что эпизодический, фрагментарный характер и не приводят к существенному повышению качественного уровня средней школы. На наш взгляд, не хватает двух главных «О»: определенности и оперативности. Выскажу в этой связи некоторые предложения, касающиеся концепции средней школы и путей ее осуществления.

Принципы демократизации, дифференциации и гуманизации предполагают достаточно большую гибкость и вариативность в построении средней школы. Излишняя линейность, чрезмерная жесткость схемы несовместимы с этими высокими принципами.

Большая определенность требуется в вопросе о целях образования. Как отмечал Г. А. Ягодин, перед школой стоят две проблемы: первая — сформулировать цель, которая бы не сводилась только к поступлению в вуз, вторая — усилить в содержании общего среднего образования морально-нравственный аспект. Не противопоставляя проблемы друг другу, важно признать приоритет воспитательных и развивающих задач. Но одного такого признания еще недостаточно. Предстоит научить учащихся жить по законам демократического общества. При этом в демократизации внутришкольных отношений больше творческой инициативы должны проявлять сами школьные коллективы, ибо инструкциями и приказами сверху воспитать такие нормы невозможно.

Усиление развивающей стороны обучения требует серьезных изменений в построении содержания учебного материала. Первые шаги в этом направлении сделаны, но они крайне робкие. Деятельностный, в частности проблемный, подход не нашел должного отражения даже в последних «конкурсных» учебниках. А без этого вряд ли можно создать реальные условия для развития творческих начал учащихся. Применение проблемного подхода в учебниках сдерживается определенными ограничениями их объема.

В последнее время раздаются призывы к резкому сокращению содержания курса математики: оставить в нем только то, что «нужно для жизни». Стремление к простоте учебного курса является ценным, но его нельзя подменять упрощенчеством. Полнота, целостность учебного курса — важнейшие условия для развития учащихся.

Демократизация и гуманизация являются и целью, и средством воспитания. Ущербность в воспитании гуманизма, милосердия к людям, природе заметно сказываются на всем обществе. В этих вопросах школа должна не идти вслед за обществом, а опережать его.

Гибкость структуры школы призвана обеспечивать возможность выбора учеником различных путей получения общего среднего образования. При этом в новом качестве могут проявить себя существующие организационные формы. Техникумы, СПТУ, ПТУ на базе неполной средней школы необходимы и в новой структуре образования. Не изжили себя также вечерние и заочные средние школы. Эти формы должны внести свой вклад в дифференциацию обучения.

Поддерживая идею трехступенчатой средней школы, отмечу, что особой заботы требует начальная школа. Образно говоря, начальная школа должна обрести свой собственный дом. В городах, районных центрах, крупных поселках начальная школа должна иметь отдельное здание или блок. Ведь не секрет, что начинающие школьники трудно втягиваются в новую жизнь, да и со старших школьников они берут далеко не всегда положительные примеры. Главное же состоит в том, что для младших школьников все должно быть свое: распорядок дня, режим учебной работы, расписание звонков. Эта идея пока недостаточно учитывается при проектировании школьных зданий. Не дожидаясь проектировщиков и строителей, кое-что можно сделать уже сейчас в результате перераспределения существующих помещений.

Не выпускать из стен начальной школы учеников, не подготовленных к дальнейшему обучению,— главнейшее требование к начальной школе. Поэтому выпускные экзамены здесь необходимы. Оставление на второй год в одном классе — крайняя мера, особенно для начальных классов. Она может быть сведена на нет, если в учебный план будет заложена необходимая профилактика. Предлагаю ввести по 2 ч в неделю корректирующий курс для отстающих учащихся (стоящий в расписании, оплачиваемый). Такой курс существует во многих зарубежных школах. Его введение полностью отвечает принципу и духу гуманизма. Корректирующий курс необходим и в неполной средней школе. Такой курс эффективнее (в силу своей оперативности) классов и школ выравнивания, куда поступают уже слишком запущенные дети.

Остро стоит вопрос о выборе языка обучения в национальных республиках. Крайности всегда нежелательны, здесь же они могут особенно навредить. Решающим в выборе языка обучения должно быть мнение родителей. В национальных республиках с большим процентом русского населения правильнее иметь и школы, в которых обучение ведется на национальном языке, а русский язык изучается в виде отдельного предмета, и школы, в которых обучают на русском языке, а язык коренного населения учащиеся изучают отдельным предметом. Такая симметрия свидетельствовала бы о взаимном уважении наций, исключала бы любую форму произвола и ущемления национального достоинства, отвечала бы самым высоким нормам социалистической демократии. В двуязычных республиках, где кроме национального и русского языка изучается еще какой-либо иностранный язык, время обучения необходимо довести до 12 лет.

За время обучения в V—IX классах заметно вырисовывается дифференциация учащихся по успеваемости, по ориентации на будущую профессию. Часть учащихся проявляет желание по окончании IX класса начать трудовую деятельность в сфере производства, сельского хозяйства, обслуживания. Считаю, что такую возможность необходимо им предоставить. В этих целях полезно более широко восстановить существовавшую ранее на предприятиях форму ученичества, а также систему ПТУ, не дающих среднего общего образования, но позволяющих получить в кратчайшие сроки рабочую специальность. Часть учащихся по окончании IX класса может пойти в техникумы или СПТУ, дающие и общее, и специальное среднее образование. Практика показывает, что эффективное решение этой «двуединой» задачи не под силу многим нашим средним профессиональным учебным заведениям. Поэтому на базе неполной средней школы следует больше практиковать такие ПТУ и СПТУ, которые обучают сравнительно несложным рабочим профессиям. Обучение рабочим профессиям инженерного типа целесообразно вести преимущественно на базе полной средней школы.

Образование должно быть всеобщим в том смысле, что до 17 лет человек должен учиться в определенном учебном заведении. Требование обязательности общего среднего образования (на практике иногда переходящее в принудительное) считаю преждевременным. Издержки такого образования хорошо известны. Потребность в общем среднем образовании лучше стимулировать экономическими мерами, нежели юридическими.

При реальном повышении объективности оценки знаний вряд ли стоит увлекаться большим количеством выпускных и промежуточных экзаменов. Свидетельство об окончании неполной средней школы может быть выдано на основании результатов двух выпускных экзаменов, промежуточных экзаменов и выставления итоговых оценок по отдельным предметам. Учащимся, успевающим на «4» и «5, оценка по промежуточному экзамену может выставляться (по желанию ученика) автоматически. Выбор предметов, по которым проводится выпускной экзамен, лучше предоставить самим учащимся. Выбор экзаменов учеником свидетельствовал бы о его планах по специализации дальнейшего обучения. А вот вступительный экзамен в полную среднюю школу, как и в техникумы и СПТУ, был бы полезен. В техникумах и многих СПТУ вступительные экзамены являются закономерностью. Почему же эта закономерность не распространяется на старшую ступень общеобразовательной средней школы? Не потому ли, что общее образование ценится меньше? А ведь эта ступень стоит в одном ряду со средними специальными учебными заведениями, дающими также общее образование. Устранение принудительности общего среднего образования делает такой экзамен просто необходимым. Вступительный экзамен на конкурсной основе мог бы служить хорошим стимулом к получению полноценного образования при любой форме обучения. Вступительные экзамены в X класс, как и выпускные из девятилетней школы, лучше проводить с учетом выбора учеником направления обучения.

Разнообразие путей получения общего среднего образования послужит мощным рычагом дифференциации обучения, средством более полного учета интересов и возможностей учащихся.

В X—XI (в национальных республиках X—XII) классах достаточно ограничиться двумя широкими потоками — академическим и техническим, которые с учетом возможностей учительских кадров могут делиться на различные секции (во Франции, например, таких секций насчитывается более 20). Одна из основных форм дифференциации в старших классах выражается в сокращении обязательных предметов и введении предметов по выбору. Вопросы, которые здесь встают, связаны с отбором обязательных предметов и предметов по выбору, с определением учебного времени на эти группы предметов.

Опыт зарубежной школы свидетельствует о том, что ни одна из форм дифференциации не является оптимальной. Поэтому разумно идти на определенный компромисс. В ФРГ, например, широко используются дифференциации, при которых отдельные предметы излагаются на трех или четырех уровнях сложности. Нежелательны крайние формы дифференциации, которые играют своего рода роль «лифта, идущего вниз»,— редко позволяют ученику, допустившему некоторое отставание, повысить уровень своего обучения. На мой взгляд, уровни сложности в отношении обязательных предметов, не должны слишком расходиться. Не должно быть резких расхождений в требованиях к выпускным экзаменам по общеобразовательным предметам. Блок предметов по выбору, напротив, должен формироваться таким образом, чтобы ученик имел возможность выбирать не только предметы, но и уровень сложности их изложения. Экзамен для предметов по выбору может быть также дифференцированным.

Различные формы дифференциации станут жизнеспособными, если будут подкреплены соответствующими учебниками. Требуется усиление роли интегрированного учебника. Зарубежный опыт показывает, что более способные учащиеся предпочитают, как правило, учебники по отдельным предметам, менее способные — интегрированные учебники. В ряде случаев интегрированный учебник может применяться параллельно с отдельным учебником.

В заключение хотелось бы обратить внимание на необходимость усиления мотивации обучения. Можно было бы приветствовать организацию классов (или групп) ускоренного прохождения учебной программы. Стремления учиться без троек будет больше, если например, учащихся, успевающих на «4» и «5», отпускать раньше на каникулы, освобождать от промежуточных экзаменов и т. д. Школьная жизнь станет намного интересней, если наряду с предметами академического характера в нее войдут такие предметы по выбору, как дизайн, музыка, вокал, танцы, специальные виды спорта, туризм, вождение автомобиля и др., стоящие по организационной форме ближе к кружковой, секционной работе.

**Н. М. Рогановский** (г. Могилев)

◆

Долгое обсуждение концепции не должно означать пребывания средней школы и педвуза в плену устаревшего, отжившего обучения математике в школе. Обсуждение необходимо сопровождать осуществлением тех положений, которые не вызывают сомнения у учителя и ученика и могут быть органически вписаны в реальность.

Концепция не должна быть жесткой. Она призвана дать возможность выбора, должна быть проникнута внутренним демократизмом.

Перейду теперь к обсуждению ряда положений материала.

1. Уже при первом чтении материала можно указать на те его части, которые в той или иной форме должны непременно войти в концепцию. Примером может служить высказывание: «Лучшие традиции преподавания математики предлагают такую методическую систему, при которой здание математики создается на глазах у учащихся и с их посильным участием».

Это положение, несомненно, является важным и ценным. Обучение воспроизведению математических знаний, полученных в готовом виде, ведет к школярству, догматизму, слепому выучиванию, если подавляет все другие подходы.

Однако именно в силу особой важности, глубинной значительности рассматриваемого положения хочется познакомиться с несколькими его истолкованиями, чтобы подойти к собственному пониманию.

Проблема нехватки времени на осуществление развивающего обучения в средней школе и педагогическом вузе представляется очень важной. В школе ее надо решать за счет дифференциации обучения и перевода ряда предметов в разряд выбираемых школьниками.

На протяжении десятилетий сокращение учебного времени средних (особенно сельских) школ и вузов из-за сельскохозяйственных работ почему-то не учитывается составителями учебных планов и программ. Они просто пренебрегают этим обстоятельством или полагают, что такой факт отсутствует. Это означает, что планирование учебной работы заранее носит искаженный, вводящий в заблуждение характер. Но обман или самообман всегда в таком случае недопустимы. Хотелось бы предупредить, чтобы наша концепция не строилась на обманной почве.

2. В разделе «Учебно-воспитательный процесс» концепции школьного математического образования говорится: «Необходимо сделать изучение математики доступным всем школьникам, решительно отказаться от бытующего представления о фатальной неспособности некоторых учеников к этому предмету». Мне нравится оптимистический тон данного заявления, но я опасаюсь, что оно может оказаться кнутом даже для самого добросовестного учителя в руках руководящих и проверяющих.

Имеется немало учеников, у которых нет математических наклонностей и которые желают выразить себя совсем в других областях знаний. И дело тут не в том, считает ли учитель ученика «фатально неспособным» к математике, а в той или иной направленности интересов. И концепция должна отразить уважение к праву человека на выбор.

В материале имеется прекрасная фраза о том, что «место математики в системе школьного образования определяется ее ролью в прогрессе общества». Но только положение это нами чаще всего абсолютизируется. Мы, преподающие математику, почти всегда считаем, что упомянутое «место» — это все сферы жизни, что оно не оставляет свободного от него пространства. На самом деле это не так.

На мой взгляд, математическая подготовка в школе должна быть достаточно фундаментальной для тех, кто собирался изучать на достаточно глубоком уровне физику, технические научные и прикладные дисциплины. Надо, чтобы эти ученики могли с легкостью и изяществом производить в этих дисциплинах все математические выкладки, не испытывая ни малейшей нужды в какой-либо зубрежке.

3. Вряд ли нужно вносить в концепцию такое утверждение: «Изучение математики вносит **определяющий** (подчеркнуто мною.— *Е. С.*) вклад в умственное развитие человека». На мой взгляд, такое подчеркивание значительности изучения математики слишком претенциозно. То, что упомянутый вклад существенный или может быть существенным при соответствующем преподавании,— это несомненно. Но несом-

ненно и то, что догматическое преподавание математики, при котором репродуктивность, заучивание преподнесенных в готовом виде знаний возведены в ранг абсолюта,— такое изучение математики не всегда вносит «определяющий вклад в умственное развитие человека». У того или иного человека определяющим в его умственном развитии может оказаться изучение других предметов — например, литературы, языка, истории, этики, философии, эстетики, юриспруденции, литературоведения, основ техники.

Математика столь великая наука, что она не нуждается в натяжках и преувеличениях.

4. Хорошо известно, что человек не может и не обязан знать и помнить все, что он изучил. В противном случае его учение должно стать догматическим, зубрежным. Но тогда для достижения некоего базового уровня знаний, о котором говорится в материале, нужно вести обучение на более высоком уровне, включающем базовый уровень как часть. Каким образом устанавливается тот оптимальный уровень обучения, который обеспечивает запланированный базис? Об этом целесообразно сказать в концепции.

5. Среди «наиболее принципиальных» идей, положенных в основу перестройки учебного процесса, в материале указана «ориентация на решение задач как на ведущий вид деятельности учащихся при изучении математики». Считаю, что при развивающем обучении, к которому призывают нас составители материала, обучение решению задач начинается с доказательства теорем, с изучения теоретического материала. Изучение теоретического материала оказывается противопоставленным решению задач лишь тогда, когда новые знания сообщаются учителем в готовом, догматическом виде, без участия школьников. Но если здание математики строится при участии учеников, то теорема предстает перед ними как центральная, ключевая, опорная задача, решение которой надо уметь воспроизводить, а формулировку помнить, чтобы пользоваться ею при решении других задач. К тому же зачастую все можно начинать с совместного выдвижения гипотезы, затем осуществлять поиск ее доказательства (или опровержения), проводить доказательство и только после этого сообщать, что нами доказана теорема.

К сожалению, в последнее время широко распространилось мнение, что целесообразно как можно быстрее, скоротечнее «изучить теорию», даже «пройти (пробежать галопом) теоретический материал» и как можно быстрее приниматься за решение задач. При этом забывается, что изучение теоретической части материала предоставляет широкие возможности для обучения математическому открытию, выдвижению гипотез, поиску идеи доказательства и путей ее осуществления, выбору тех или иных математических методов, для вооружения умением использовать такие мыслительные операции, как анализ и синтез, сравнение и аналогия, обобщение и конкретизация, индукция и дедукция. Вряд ли разумно переносить все эти возможности только в сферу «задач на применение теории».

Согласен, что «задачная деятельность» учащихся должна быть ведущей, но в определенном смысле. А именно: изучение теоретического материала должно быть поставлено так, чтобы при его изучении учащиеся учились решению математических задач, математическому открытию, приобретению новых знаний. Ставить же китайскую стену между деятельностью по изучению «теории» и «по решению задач» считаю нецелесообразным. Она, вероятно, нужна лишь тем учителям, которые полагают, что овладение школьным курсом математики состоит лишь в выучивании формулировок определений и теорем да доказательстве последних.

Во всяком случае, содержащаяся в материале формулировка об ориентации на решение задач нуждается в доработке и уточнении.

6. Призыв «перейти от декларации учета возрастных особенностей школьников к действительной реализации этой идеи» можно только приветствовать. Думаю, осуществить его вряд ли возможно без использования **«метода наслоения»**. Что я понимаю под этим методом?

Поскольку мы не сомневаемся в существовании возрастных особенностей школьников, то должны признать, что изложение одной и той же темы для учащихся разного возраста должно отличаться. Но тогда почему восьмиклассник или десятиклассник, повторяя и систематизируя материал давно прошедших лет, вынужден это делать по учебнику многолетней давности, написанному в соответствии с давним детским состоянием школьника? Почему ученик нынешний вспоминает, повторяет «былое», а не осмысливает, не оглядывает его с высоты возраста, эрудиции, достигнутых знаний и развития? Ведь ему нужно новое понимание, которое должно «наслаиваться» на понимание прошлое, на уровень давно ушедших дней, принимать более богатую форму и более богатое содержание. Теперь другими должны быть уровни строгости, общности, глубины. Знания должны становиться более широкими, осмысленными, а на прежние знания ученик должен смотреть, словно в дорогое детство с вершины взрослости.

Разработка и использование **«метода наслоения»**, как необходимого средства учета возрастных особенностей школьников и систематизации их знаний, на мой взгляд, весьма актуальная проблема, и было бы целесообразно сказать об этом в концепции.

7. Нужно сделать школьный курс математики «открытым». Что это значит? В настоящее время учебники абсолютно ничего не говорят о том, какие разделы математики существуют за рамками школьного курса. Это создает у школьников впечатление завершенности, исчерпанности математики как науки, обедняет их представления о математике.

Из уст учителя и со страниц учебника ученик средней школы должен иметь возможность узнать, услышать о мире математики, который несравненно шире, чем школьный курс. Ему должна быть рекомендована соответствующая литература, об издании которой необходимо заботиться соответствующим издательствам.

8. Нельзя обойти в концепции, нацеленной на настоящее и будущее, такой вопрос, как обучение составлению задач. Поставленная в материале цель — развивать умственные навыки школьников, обучать этим навыкам — создает необходимые условия для такого обучения.

9. Думаю, что нам следует поддержать мысль А. В. Гладкого, высказанную им в газете «Известия» (19 мая 1989 г.), о том, что следует разрешить открытие кооперативных школ. Такие школы смогли бы внести большой вклад в разработку концепции, экспериментальную проверку ее положений. Но уже и сейчас было бы полезно

использовать имеющиеся проекты кооперативных школ для разработки концепции школьного математического образования.

В заключение хочется выразить свое согласие с точкой зрения Валерия Босенко (Поиск. 1989. № 2) на то, что до сих пор «мы «куем кадры» вместо того, чтобы растить глубоко образованные и широко мыслящие личности». Пока в обществе не будет преодолен антиинтеллектуализм, пока учительские кадры будут «коваться», до тех пор любая концепция будет бесплодной, мертвой.

Однако следует приветствовать появление материала для подготовки концепции математического образования. Он позволит выявить наши слабые и трудные места, заставит думать о том, в каких направлениях осуществлять поиск вариантов обучения математике в средней школе и подготовки учителей, за что сражаться, что требовать от государства и общества для достижения благородных целей образования.

**Е. Е. Семенов** (г. Витебск)

◆

Основная черта предстоящих изменений в преподавании математики определяется решением о дифференциации обучения в старшем звене, исключительно важном с точки зрения демократизации школы. Реализация этого решения ставит перед теми, кто отвечает за математическую подготовку школьников, серьезные проблемы: требуется действительно новая концепция обучения, касающаяся не только содержания образования, но и всей методической системы обучения.

В настоящее время мы видим в преподавании математики в школе два класса проблем: обучение в среднем звене — допрофильном и в различных профилях в старшем. В связи с этим возникает множество вопросов, на которые следует искать ответы. Например:

1. Во всех ли профилях должно быть обязательное преподавание математики?

2. Как соотносится преподавание математики в профилях с подготовкой учащихся к поступлению в высшие учебные заведения?

3. Каким должен быть курс математики в различных гуманитарных профилях, в профилях, не ориентированных на получение высшего образования непосредственно после школы?

4. Каким должен быть курс математики и методическая система обучения в среднем звене, чтобы решить двойную задачу: обеспечить необходимые математические знания и привить культуру мышления всем без исключения учащимся, в том числе и тем, кто в дальнейшем будет использовать математику «на уровне магазина и платежной ведомости», и обеспечить достаточное и притом непременно добровольное комплектование классов по различным профилям?

Ясно, что оптимальное решение поставленных проблем должно было быть предметом основательных, глубоких научных исследований, однако, как это уже часто бывало, мы вынуждены «ремонтироваться на ходу» и поэтому вырабатывать необходимые ответы на основе общественного мнения, опыта учителей математики, методистов, ученых-математиков и преподавателей вузов.

Мы считаем, что преподавание математики должно быть обязательным на всех ступенях общеобразовательной школы и во всех профилях. Возможно, этот взгляд объясняется тем, что преподавание математики — это наша профессия, однако, как профессионалы, мы хорошо знаем, какое значение имеет математика не только сама по себе, но и процесс ее изучения, даже преодоление трудностей учащимися при ее изучении в деле формирования личности, в развитии абстрактного, и прежде всего логического, мышления, необходимых каждому человеку.

Однако мы не можем взять на себя смелость, например, предложить конкретное содержание курса математики в том профиле обучения, где окажутся учащиеся, мягко скажем, слабо успевающие по математике, ею не интересующиеся и внутренне ориентированные на профессию, где математики нет и не может быть. Эта проблема, безусловно, должна решаться на научной, концептуальной основе методистами-профессионалами с опорой на исследование социального заказа.

Нам кажется, что действительно современная система обучения математике в школе должна обеспечить такой уровень подготовки в профильном обучении, который полностью обеспечивал бы потребности высшей школы. И не только обеспечивал, но и гарантировал, что позволило бы высшим учебным заведениям отказаться от громоздкой и требующей много сил и средств системы вступительных экзаменов или хотя бы вернуть этой системе конкурсный характер, в большой степени утраченный в течение последних десятилетий.

Нам представляется бесспорным, что в гуманитарных профилях математика должна преподаваться на серьезном уровне и быть, конечно, обязательным предметом. Будущий историк, археолог, юрист, экономист, филолог уже в школе должен показать свои возможности в усвоении материала высокого уровня абстрактности, достичь соответствующего общего уровня развития мышления. В этих профилях целесообразно изучение элементов математической логики и теории множеств, элементов абстрактной алгебры, более углубленное, по сравнению с общеобразовательной ступенью, начал теории вероятностей и математической статистики. Нельзя не помнить о том, что высшие учебные заведения, в конце концов, формируют и передовой отряд советских ученых и не смогут решить этой задачи, если не будут пополняться выпускниками школы с хорошей математической и, вообще, теоретической подготовкой.

К сожалению, в опубликованных материалах к концепции поставленные проблемы практически не затрагиваются или заменяются декларациями. Например, вместо аргументации в пользу включения «соответствующих курсов математики в учебные планы на всех ступенях обучения» мы обнаруживаем лишь ссылку на тенденцию мирового опыта, в котором, однако, присутствуют и другие тенденции, особенно в высшем образовании — отток студентов с естественнонаучных факультетов, настоящий бум в области гуманитарных наук и экологии. Кроме того, в ряде стран принята балльная система оценки предметов, и математика, хотя и имеет высокую оценку в баллах, не является обязательной.

Вообще, предложенные материалы к концепции школьного математического образования разочаровывают явным несоответствием их содержания революционным изменениям, которых требует преподавание математики в школе в настоящее время. Провозгласив «ключевые направления реформы школы на современном этапе — демократизацию, гуманизацию, реализм школьной политики», авторы на очень разных уровнях осветили свои взгляды на реализацию направлений.

В направлении демократизации математического образования мы считаем перспективной идею дифференциации учебных требований и вытекающую из нее задачу «создания такого учебного процесса, когда объем и уровень преподавания превышает объем и уровень обязательных требований». С этой идеей педагогическая общественность ознакомилась уже несколько лет назад, и она получила, как нам кажется, достаточное одобрение, несмотря на очевидные недостатки конкретных предложенных обязательных результатов: недостаточно ясные мотивировки отнесения отдельных элементов знаний и умений к обязательному уровню или отсутствие такой мотивировки, нерасчлененность между промежуточными и конечными требованиями, несоотнесенность конечных требований с целями обучения математике в школе.

Особо следует отметить, что за много лет педагогическая общественность не смогла ознакомиться с представлениями авторов этой идеи относительно более высокого уровня требований и способами его достижения в условиях, когда требуется достижение всеми без исключения учащимися обязательных результатов. Кстати, не совсем ясно, что имеют в виду авторы, говоря об «обеспечении постепенности в движении школьников» по уровням учебных требований.

Меньше повезло двум другим ключевым направлениям. В разделе «Гуманитарная направленность общеобразовательного курса математики» мы не находим ничего действительно концептуального, кроме «отказа от сложившейся практики построения сложного школьного математического курса как безупречной в логическом и структурном отношении последовательности изложения готовых результатов и сведений»: все остальное представляет собой традиционные призывы усиления прикладного и практического аспектов, переход от «декларации учета возрастных особенностей школьников к действительной реализации этой идеи», «ознакомление школьников с математикой как определенным методом миропознания» и т. п.

Сколько таких призывов мы уже слышали и сколько диссертаций на эту тему написано? Поэтому методистам-профессионалам, разрабатывающим основы нового преподавания математики, следовало бы в качестве исходных положений указать более конкретные, принципиальные позиции в вопросе реализации этих призывов, например на основе тех же диссертаций. В частности, хотелось бы найти в этих положениях ответы на предложения М. М. Постникова, высказанные в «Литературной газете», направленные как раз на реализацию гуманитарной направленности школьного изучения математики. Почему они все же являются неприемлемыми для концепции школьного математического образования?

И даже этот тезис не совсем ясен. От чего надо отказаться: от логической и структурной последовательности или от изложения математики как суммы готовых истин? А ведь это разные вопросы.

Что же касается «реализма школьной политики», то с этим тезисом в общем виде нельзя не согласиться, поскольку обучение вообще представляет собой слишком инерционную систему — достаточно упомянуть хотя бы необходимость переподготовки учителей. Но в том-то и главное диалектическое противоречие настоящей реформы: необходимость революционных изменений и невозможность таких изменений в короткий срок. Однако в качестве «реализма» авторы преподносят явный консерватизм, внося, например, в содержание курса математики единственную новую содержательную линию — «Элементы теории вероятностей и статистики» (включив в нее, правда, непонятные «случайные испытания») и ведущий характер «наглядной геометрии». В то же время авторы даже не попытались каким-либо образом обосновать отказ от включения в курс комплексных чисел, изучение которых может внести большой вклад в гуманитарную направленность математики.

Авторы выдвигают и вполне традиционный тезис о том, что «учебная деятельность, связанная с понятием уравнения, занимает (или должна занимать? — *Н. К.*) ведущее место в школьном обучении», поскольку «уравнение — это основная модель, описывающая разнообразные явления в природе и обществе». Однако в дальнейшем видно, что имеются в виду «линейные, квадратные и сводимые к ним уравнения», которые лишь с очень большой натяжкой можно считать описывающими реальные ситуации. По-видимому, авторы имеют в виду обычные «задачи» на составление уравнений, но общеизвестна их условность и неэффективность в формировании настоящих «представлений об основном математическом методе изучения действительности — математическом моделировании». Между тем о дифференциальном уравнении, как аппарате подлинном, аппарате изучения реальных явлений, мы находим в исходных положениях лишь упоминание со словом «возможно»!

И наиболее удивительный момент: отказ авторов от подробного обсуждения одного из самых главных аспектов современного преподавания математики — использования вычислительной техники, и вместо серьезнейшего анализа влияния использования этих средств на содержание, на методику обучения, на организацию учебного процесса авторы ограничиваются лишь совершенно тривиальными замечаниями.

Складывается впечатление, что создавать концепцию школьного математического образования надо с самого начала, и мы уверены, что публикация «исходных положений» привлечет к этому внимание всех учителей и других специалистов, заинтересованных в решении одной из важнейших проблем советской школы.

**Н. М. Кварацхелия** (г. Сухуми)

◆

В предложенных материалах к концепции школьного математического образования характеристика содержательно-методических линий дана достаточно полно. Но, на наш взгляд, стоило бы провести их анализ и с позиций новых информационных технологий обучения, которые планируется широко использовать.

Конечно, считать компьютер панацеей от всех бед нельзя. Ограниченность применения компьютеров в учебном процессе диктуется, в первую очередь, социально-педагогическими причинами: компьютер не должен править высшими человеческими ценностями, а должен служить им. Компьютер никогда не будет «наставником учащихся», это под силу лишь учителю. Любая, даже самая передовая, технология приведет к успеху лишь тогда, когда будет учтен человеческий фактор.

Но там, где компьютер несет явное преимущество в обучении, его использование необходимо. Так, например, возможность компьютера представлять динамику графического изображения позволяет существенно изменить характер содержания и методику преподавания геометрии. Вот почему в концепции следует соответствующим образом пересмотреть вопросы обучения геометрии (да и алгебры) с учетом новых информационных технологий обучения.

Радует, что авторы концепции уделили серьезное внимание пополнению традиционного ядра школьного курса математики некоторыми вероятностно-статистическими понятиями. Но думается, что основное направление внедрения соответствующего содержания состоит не только в том, чтобы включить вероятностные и статистические идеи «в задачный материал путем расширения традиционного набора формул и арсенала методов решения», но и в том, чтобы рассматривать пришедший в школу компьютер как мощнейшего интеллектуального помощника ученика. Компьютер позволяет моделировать различные явления и процессы, он может играть роль видеолаборатории (например, «открытие» учеником теоремы), и в этом плане вероятностные методы могут сыграть свою важнейшую роль.

В концепции представляют интерес разделы «Уровень обязательной подготовки (базовый уровень)», «Дифференциация обучения математике». Но думается, что следует дать ответы и на такие вопросы: как соединить индивидуальное обучение, зависящее от склонностей ученика, с общим направлением народного образования? Как сблизить потребности общества и запросы личности?

Еще одно замечание по этим разделам. Концепция школьного математического образования направлена в будущее, но она должна вести за собой и сегодняшнее обучение. Вот почему представляется целесообразным делать ссылки на то, что должно иметь место в сегодняшней школе, а что — в будущей.

В разделе «Учебно-воспитательный процесс» следует, на наш взгляд, вести разговор о всех компонентах методической системы обучения: цели, содержание, методы, формы, средства. Особый разговор должен идти о влиянии новых информационных технологий обучения на все компоненты методической системы.

В целом материалы, разработанные лабораторией обучения математике НИИ СиМО АПН СССР совместно с кафедрой высшей математики ЛЭТИ им. В. И. Ульянова, могут послужить основой для создания концепции школьного математического образования.

**В. А. Далингер** (г. Омск)

◆

Мы в целом согласны с проектом концепции школьного математического образования, хотя имеем ряд замечаний и предложений.

1. Раздел «Место математики в системе школьного образования» почти полностью повторяет объяснительную записку к государственной программе. На наш взгляд, это делать нецелесообразно.

2. Раздел «Характеристика содержания общего математического образования» в большинстве своем декларативен. Выполненный авторами разбор учебного материала по основным содержательным линиям программы удачен, но для учителя бесполезен.

3. Задачи осуществления политики перестройки народного образования и воспитания молодежи, поставленные февральским (1988 г.) Пленумом ЦК КПСС и XIX Всесоюзной партконференцией, вообще говоря, в рассматриваемом материале четко не реализуются. В разделе «Гуманитарная направленность общеобразовательного курса математики» авторы справедливо указывают, что «необходимо перейти от декларации учета возрастных особенностей школьников к действительной реализации этой идеи», однако фактически сами этого не делают, технологию работы учителю не предлагают. Кроме того, говоря о возрастных особенностях школьников, на наш взгляд, следует иметь в виду, что старшеклассники, возраст которых 16—17 лет, являясь полноценными гражданами страны, фактически ущемлены в правах личности — они не имеют права выбора содержания своего образования. Мы считаем, что, например, математику старшеклассники могут изучать при свободном посещении уроков или по индивидуальному плану, при этом они должны участвовать в коллоквиумах, сдавать зачеты.

4. Авторы безусловно правы, указывая в разделе «Учебно-воспитательный процесс»: «Практическая реализация в школьном преподавании указанных идей требует глубокой психологической перестройки учителя, отхода от ряда традиционных установок». Так же, как и авторы, мы считаем, что потребуется разработка новых приемов и форм обучения, в большей степени ориентированных на индивидуальный подход к учащимся, а это, в свою очередь, потребует создания нового учебно-методического обеспечения. Нам, сотрудникам учебно-методического кабинета математики МОИУУ, хотелось бы, чтобы вместе с указанным материалом в концепцию общего среднего образования были заложены методика и технология работы с учителем, а также указаны основные пути, по которым возможна реализация поставленных задач.

В заключение заметим, что номенклатура тем в содержании школьного математического образования позволяет развить творческий потенциал школьников и при правильной постановке обучения подготовить учащихся к жизни и труду в социалистическом обществе.

**Г. З. Генкин, Г. Н. Виноградова** (Москва)

# Против умаления роли методики математики

Постановление Бюро Отделения математики Президиума АН СССР о необходимости выделения 50 % учебного времени для изучения элементарной математики на факультетах, готовящих учителей математики, чрезвычайно актуально (хотя и является запоздавшим) (см.: Математика в школе. 1989. № 3).

В нашей стране подготовка учителей математики ведется как в пединститутах (числом около 200), так и в периферийных университетах (числом около 60). В указанном решении справедливо отмечено, что «курс школьной математики является основным полем профессиональной деятельности учителя, и он должен сопутствовать всему процессу обучения» будущих учителей математики. Однако в докладе академика С. П. Новикова и в указанном решении почему-то речь идет только о пединститутах; между тем указанные предложения полностью относятся и к подготовке учителей в университетах, в которых она поставлена сейчас несравненно хуже, чем в пединститутах. Но об этом ниже.

Применительно к университетам крайне важно преодолеть организационные неполадки, доставшиеся нам с 70-х гг., когда при преобразовании пединститутов в ряде областей был осуществлен перевод обучения будущих учителей на беспрофессиональные учебные планы университетов, ориентированные не на подготовку к конкретной профессии учителя, а, по традиции, якобы к сугубо научным исследованиям в области математики. Подобная тенденция отражена в официальных документах, регулирующих деятельность университетов. Так, в дипломе оканчивающего математический факультет университета записывается: «Математик. Преподаватель». Разделительный знак «точка» поневоле зафиксировал, что невозможно убить двух зайцев, т. е. нереально добиться в массовом обучении соединения научной специальности (математика) с конкретной профессией (учитель).

Действующий ныне план университета крайне перегружен не нужной для профессии учителя избыточной информацией, отнимающей время и энергию студентов, пожелавших стать учителями. Дело дошло до парадоксов: в университетах Элисты, Нукуса будущим учителям математики малоопытные кандидаты наук (в лучшем случае) читают курсы уравнений математической физики, ТФКП, исследования операций, которые вовсе не изучаются в таких педвузах, как МГПИ, ЛГПИ.

Любой учебный план реально выполняет две функции: готовить студента к будущей профессии (для хлеба, ему насущного) и обеспечивать рабочее место для выпускников аспирантур, защищающихся ныне по многим проблемам, только не по методике и технологии обучения. Действующие сейчас учебные планы математических факультетов университетов, готовящих учителей математики, пытаются обеспечить вторую функцию в ущерб первой.

Учебные планы всех университетов — однопрофильные, и потому выпускникам периферийных университетов в принципе невозможно даже обеспечить себе нагрузку в малокомплектной восьмилетке хутора (фермы).

Учебные планы университетов выделяют на методику ... 70 ч лекционного времени, на задачи по элементарной математике не выделяется ни одного часа; новоиспеченный кандидат наук имеет право специализироваться в университете, скажем, по однолистным функциям (объемом 500 ч), а доктору педагогических наук такая специализация по методике не разрешается вообще. Но умаление роли профессии на этом не заканчивается. Учебные планы университетов разрешают студенту, не «планирующему» быть преподавателем, вовсе не посещать занятия по методике. По действующей раскладке Гособразования СССР педвузовская квалификация учителя трактуется официально как более низкая, чем у окончившего аналогичный факультет университета.

Короче говоря, в университете сделано все, чтобы умалить статус профессии учителя посредством ущемления объема и содержания научной дисциплины методики и технологии математики. Между тем теорию и практику школьной математики, учебников, уроков, упражнений, историю и методологию математики, психологию усвоения математических знаний — все это относят к предмету методики. Лишь в 1988 г. Государственный комитет по народному образованию СССР предоставил право готовить учителей в университете и по учебным планам педвузов. Однако примечательно то, что этим правом нигде никто не воспользовался.

Выход мы видим один: имеются все основания для Гособразования СССР отменить неверное решение бывшего Минвуза, переведшего в годы застоя подготовку учителей во многих национальных регионах на беспрофессиональные учебные планы университетов.

Для нынешней ситуации подготовки учителей в стране актуально звучит завет академика Остроградского о том, что преподаватель может, в крайнем случае, знать не более того, что он должен преподавать, при условии, что этими знаниями он обладает во всей полноте, со всеми частностями, какие можно себе представить, и со всеми возможными непосредственными приложениями.

Очевидно, первым шагом в выполнении постановления АН СССР должно быть достижение крайнего минимума, высказанного Остроградским, создание во всех педвузах кафедр методики математики, усиление диссертационных исследований по методике и технологии обучения математике в школах, техникумах, вузах.

Нонсенсом звучат в этой связи предложения иных авторов, призывающих сократить в педвузах курс методики, ключевой дисциплины для фундаментализации (или, что то же самое, профессионализации) подготовки учителя математики.

Б. П. Эрдниев (г. Элиста)

## Учить учиться

Безусловную поддержку заслуживают положенные в основу математического образования принципы. В проекте концепции достойное место занимает идея компьютеризации. Проект охватывает достаточно широкую сферу проблем и задач, связанных с процессом гуманизации и демократизации образования. Эту взаимосвязь и развитие самого процесса математизации общества авторам проекта удалось показать наиболее удачно. В проекте широко освещены прогностические вопросы математизации образования, достаточно полно охвачены проблемы профессионального среднего образования.

Нам представляется необходимым внести в проект концепции некоторые коррективы и дополнения, отражающие современные задачи средней школы и содействующие коренному улучшению ее работы.

1. Известно, что при построении курса математики опираются на следующие принципы: принцип системного расположения учебного материала, развивающего обучения, преобразования учебной информации из наглядно-действенного в словесно-логический план на основе частично-поисковой деятельности учащихся, структурно-логического расположения материала в учебных пособиях в соответствии с этапами планирования уроков в школе.

2. Сегодня от школы и от учителя требуют не только дать знания, сформировать программные умения и навыки у всех ребят, но главное, научить школьников творчески распоряжаться ими. Другими словами, школьники должны приобретать и совершенствовать знания самостоятельно. Но, к сожалению, урок математики, как и любой другой, часто сводится лишь к «прохождению» программы, причем преимущественно с использованием объяснительно-иллюстративного метода: делай, как я делаю. Нам думается, что ситуация изменилась бы, если бы мы умели формировать у школьников умение учиться.

3. Нам представляется, что нельзя из центра давать единые для всех школ страны директивы, как преподавать математику. Основная идея, которая полностью соответствует демократизации нашего общества,— это идея самоопределения ученика, школы и всей образовательной системы. И это надо отразить в концепции.

4. Учителя математики нуждаются в хороших, современных вариантах учебников. Но, как видно, положение здесь не улучшается. Огромные надежды связывались с конкурсом учебников по математике. К сожалению, условия проведения конкурса и его результаты не могут не вызвать разочарования. Опять проявилась неоправданная поспешность, жесткая регламентация программных требований, сковывающая инициативу творческого поиска авторов. Более того, в проведении конкурса не было должной демократичности. Участники конкурса не могли ознакомиться даже с рецензиями, поступившими на их книги. В некоторых рукописях, представленных на конкурс, несомненно, имеются оригинальные подходы к решению сложных методических вопросов. Увы, учительство лишено возможности ознакомиться с этими научно-методическими направлениями.

5. Учителя с одобрением встретили предложения о выделении им части учебных часов для использования по своему усмотрению. Но к такой самостоятельности их надо готовить.

Концепцию школьного математического образования нужно, конечно, сделать более гибкой, допускающей свободу, вариации в подходе к обучению. Не следует детерминировать работу школ так, как это делалось раньше.

**Дж. Шарифов, С. Азизов, Ш. Рахмонов** (г. Куляб)

# О роли математики в формировании у учащихся научного мировоззрения и нравственных принципов

Б. В. Гнеденко (Москва)

Советская школа всегда проявляла заботу о всестороннем развитии молодого поколения, о передаче ему необходимых в жизни знаний и умений. Но сейчас, в связи с перестройкой, поставившей перед страной и народом грандиозные цели, многократно возрастает важность задач формирования у молодежи научного мировоззрения, прочных нравственных принципов, творческого отношения к решению возникающих проблем. Теперь ясно видно, что совсем недостаточно снабдить каждого молодого человека документом об окончании среднего образования, что необходимо развить в нем инициативу, способность использовать знания в новых ситуациях и привычку напряженно трудиться. За инициативу, за собственный путь решения школьник обязательно должен получать поощрение, а не окрик учителя: «Действуй только по правилам!» Привычка мыслить по-своему, правильно, но нестандартно должна рассматриваться как весьма желательное явление, поскольку она служит основой изобретательства, самостоятельного творчества. Только путем развития инициативы каждой личности нам удастся создать новые технические системы и более совершенные технологии. Но для дальнейшего прогресса этого еще недостаточно — требуется воспитать у работников честность, работоспособность, ответственность за порученное дело, высоконравственное отношение к людям.

Наша страна богата талантами, у нас много молодежи, обладающей задатками самостоятельного мышления, которые следует максимально развивать. В этом исключительно велика роль школы и школьного учителя. Но она должна быть еще большей. Для этого необходимо прежде всего исключить из педагогического процесса все признаки догматизма.

Но, к сожалению, и в наши дни мы нередко встречаемся с фактами догматизма в его различных проявлениях. Так, например, без должного анализа иногда пропагандируется опыт учителей (в том числе и математики), который трудно трактовать иначе как догматический. Есть случаи, когда этим учителям предоставляют всесоюзную трибуну по телевидению и в печати, но их выступления не выдерживают анализа, даже не очень глубокого; настолько много в них непростительных педагогических и даже математических ошибок. Следует сказать, что вообще бездумное заимствование опыта преподавания, без собственного переосмысливания и внесения личного начала, обречено на неудачу. В то же время творчески воспринятые чужие педагогические находки всегда приносят ценные плоды. Чужая мысль находит как бы вторую жизнь, когда она становится естественной частью личного методического опыта и созданного на этой основе личного идеала преподавания и общения с учащимися.

Необходимость преодолеть педагогический догматизм обязывает нас решительно поддерживать противников единого и единственного для всей страны стабильного учебника. Нужно иметь несколько учебников, написанных в различных методических планах, но по одной программе. Учителю должно быть предоставлено право выбора того учебника, которого он будет придерживаться. Возможно и такое положение, когда учитель излагает разные главы курса по разным учебникам, если такая система представляется ему более предпочтительной. Хорошо известно, что преподаватель, получивший свободу в выборе системы изложения, раскрепощается: его речь становится непринужденной, он находит слова, особенно запоминающиеся и легко воспринимаемые учащимися.

В последние десятилетия как в средней, так и в высшей школе все меньше и меньше внимания уделяется мотивировке изучения того или иного раздела математики и развитию интереса к ней. Изложение формальной стороны дела и стремление сообщить как можно больше результатов — вот к чему сводится преподавание курса. На самом же деле на всех уровнях обучения учащиеся нуждаются в значительно большем: в сведениях, которые увязывают их предыдущий опыт с новыми знаниями.

В беседе с классом учитель мог бы показать, что дают эти новые знания для решения старых задач и какие перспективы открывают в различных областях деятельности. В результате таких бесед математика возникала бы в сознании учащихся не как формальный набор теорем и абстрактных определений, но как орудие практики, необходимое средство познания проблем физики, обороны страны, инженерного дела, биологии и экономики.

Выдающиеся математики и педагоги прошлого уделяли большое внимание пробуждению интереса учащихся к урокам, а также налаживанию человеческих отношений между учащимися и педагогами. Они считали, что каждая встреча преподавателей с учащимися, каждое занятие должно нести нечто большее, чем чисто формальное расширение знаний и навыков, которые можно приобрести, занимаясь только по учебнику. В этом отношении интересен рассказ А. М. Ляпунова о его великом учителе П. Л. Чебышеве. Курсы П. Л. Чебышева, писал А. М. Ляпунов, не были обширными. Он заботился не столько о количестве сообщаемого, сколько о выяснении принципиальных сторон трактуемых вопросов. Его живые и увлекательные лекции сопровождались множеством интересных замечаний относительно значения тех или иных вопросов и научных методов. Замечания эти высказывались иногда мимоходом по поводу какого-нибудь конкретного случая, но всегда глубоко западали в умы слушателей. Вследствие этого лекции его имели высокое развивающее значение. Из каждой слушатели выносили нечто существенно новое в смысле большей широты взглядов и новизны точек зрения. «В аудитории он появлялся всегда в точно назначенное время и тотчас же, не теряя ни секунды, приступал к продолжению выводов, начатых в предшествующую лекцию. Вычисления производил чрезвычайно быстро, вследствие чего, несмотря на то что был прекрасным калькулятором, часто делал ошибки в выкладках, и за ходом вычислений нужно было следить очень внимательно, чтобы во время предупредить его о сделанной ошибке, о чем он всегда просил своих слушателей. Когда, наконец, получался желаемый вывод, П. Л. Чебышев садился, но не у кафедры, а на кресло, ставившееся для него всегда у первой парты, и вот тут-то и начинались те разнообразные замечания, которые придавали особенный интерес его лекциям и которых с нетерпением ждала вся аудитория. Весьма часто по поводу только что решенного вопроса П. Л. Чебышев высказывал свои мнения о тех или других работах, относящихся к тому же вопросу. Иногда он вспоминал при этом некоторые эпизоды из своих заграничных поездок и рассказывал о беседах по поводу того же вопроса с кем-либо из иностранных ученых. После более или менее продолжительной беседы этого рода, служившей для него отдыхом, П. Л. Чебышев, быстрый как в речи, так и во всех своих действиях, брался за мел, быстро вставал и приступал к дальнейшим выводам».

Большая цитата из воспоминаний А. М. Ляпунова служит контрастом той торопливой и антигуманной административно-командной педагогике, проявления которой мы теперь столь часто наблюдаем. Педагогов пора освободить от необходимости постоянно заботиться только о своевременном выполнении предложенного им жесткого учебного плана. Они должны иметь время для того, чтобы заинтересовать учащихся предметом, не избегать бесед о принципиальных вопросах науки, в том числе и о связях математики с разнообразными вопросами практики.

Замечательный отечественный математик и педагог М. В. Остроградский писал: «...скука является самой опасной отравой. Она действует беспрестанно; она растет, овладевает человеком и влечет его к наибольшим излишествам». Сейчас вспомнить эти слова особенно своевременно, поскольку часть молодежи попадает под влияние далеко не лучших сил общества. Противодействовать этому влиянию — одна из важнейших задач школы. Нужно сделать все возможное, чтобы в школе не было скучно. Если наша школа будет освобождена от формализма, она сможет привить детям высокие интересы, общение с педагогами будет доставлять учащимся истинную радость.

Еще каких-нибудь 50 лет назад представители естествознания смотрели на математику лишь как на средство, позволяющее формулировать количественные закономерности природы. Но в настоящее время эти взгляды изменились, к прежним представлениям добавился ряд новых: математика была названа языком науки. Ряд первоклассных физиков нашего времени высказали еще одно очень важное положение, согласно которому математика не только создает математические модели явления, позволяющие выводить путем вычислений следствия, но и указывает экспериментатору, в каком направлении и как проводить эксперимент. Это обстоятельство имеет исключительное значение для развития многих областей человеческой деятельности. Можно привести много примеров, когда математический подход позволял вскрыть суть экономических, сельскохозяйственных или технических явлений и внести существенные изменения в наши знания и в дальнейшие практические действия.

Новый взгляд на математику непосредственно относится к воспитанию научных идеалов молодежи: познавать, чтобы действовать и совершенствовать нашу повседневную жизнь. Он же дает возможность пойти дальше, помочь в воспитании научного мировоззрения, и прежде всего его материалистической основы, поскольку любой естествоиспытатель убежден, что изучает объект реально существующий, не зависящий от воспринимающего и исследующего субъекта.

Познание природы первоначально шло по пути качественного описания ее явлений, без количественных сравнений, без математики. На этом пути строились гипотетические положения, большинство которых не подтвердилось в дальнейшем. Совсем иная судьба складывается у математически обоснованных гипотез. Они подтверждаются не только тем, что помогают обнаружить допущенные ранее ошибки, но и тем, что позволяют предвидеть результаты исследований в других областях знания.

Обратимся, например, к астрономии. Как известно, гипотеза Птолемея о движении Солнца и планет вокруг Земли основывалась прежде всего на качественном наблюдении, на «очевидном» движении Солнца по земному небосклону. Прошли тысячелетия, прежде чем человечество сделало новый шаг познания — перешло к количественному изучению явлений. На основе многовековых наблюдений, измерений и вычислений была сформулирована гипотеза Коперника и найдены законы Кеплера.

Количественное изучение явлений потребовало широкого привлечения уже существующих и развития новых математических методов. Постепенно выработался особый прием, свойственный всем наукам, но особенно развитый в математике: идеализация изучаемого объекта, т. е. отвлечение от всех остальных свойств, присущих ему, кроме тех, какие подвергаются изучению. В математике это количественные соотношения и геометрические формы. Идеализация — один из приемов математического метода исследования. Еще один важный прием математического метода — формализация рассуждений, когда допускаются заимствования только из первичных предположений об объекте исследования и не допускаются посторонние соображения.

Подлинный триумф количественных методов исследования явлений природы пришелся на середину прошлого века и повторился в 1930 г., когда в результате вычислений движения известных планет Солнечной системы были сделаны заключения о существовании еще неизвестных небесных тел. Вычисления позволили определить их положение на небесном своде в определенные моменты времени, а также их массы. Астрономы-наблюдатели тщательно исследовали указанные участки неба и, действительно, заметили «новые» небесные тела. Таким образом, «на кончике пера», была открыта планета Нептун французом У. Леверье и англичанином Дж. Адамсом в 1846 г. Таким же путем американец П. Лоуэлл в 1930 г. обнаружил планету Плутон.

Столь же впечатляющи успехи математических методов в инженерном деле, во всем машиностроении. Результаты, полученные в области математического анализа, теоретической механики, небесной механики позволили запустить в космос исследовательские станции и начать непосредственное изучение Луны, Венеры и других тел Солнечной системы, включая комету Галлея. Не будь развитых математических методов изучения механического движения, мы были бы лишены мощного метода исследования закономерностей природы и многих вопросов практики.

С помощью математики человечество далеко продвинулось в изучении природы, но природа ставит все новые и новые вопросы. Как предугадать землетрясения, наводнения и ураганы? Как распространяются радиоволны в глубинах океанов? Что служит причиной возникновения таких заболеваний, как, например, рак и глаукома? Ответов на эти вопросы пока нет, а значит, невозможно прогнозировать перечисленные явления. Но опыт последних столетий убедительно показывает: когда перед человечеством возникают серьезные проблемы, то постепенно удается находить и их решения. Первоначально эти решения являются лишь частичными, но затем постепенно совершенствуются.

Каждый шаг продвижения вперед требует интеллектуальных усилий, наличия увлеченных людей. Ознакомить молодежь с фундаментальными жизненными проблемами, заинтересовать ее ими и вселить уверенность в творческих возможностях должна прежде всего школа.

В ближайшие годы, а то и десятилетия, нашему народу придется много поработать, чтобы продвинуть вперед теоретическую и прикладную науку, создать и новые технические системы, и новые технологии, на порядок повысить надежность машин и аппаратуры, существенно изменить к лучшему экологическую обстановку; поднять качество медицинского обслуживания; усовершенствовать систему народного образования. Решение этих задач потребует большого числа творчески мыслящих и решительно действующих педагогов, инженеров, врачей, ученых, рабочих, владеющих математическими методами.

В 50-е гг. после запуска Советским Союзом первого искусственного спутника Земли Конгресс и Сенат США высказывали обеспокоенность тем, что школьное математическое образование в США было поставлено хуже, чем в СССР. Общественность США критиковала школу за то, что в ней можно было получить диплом об окончании школы, имея плохие оценки по математике и физике. Тогда там были предприняты серьезные меры по улучшению преподавания математики, в частности увеличилось число специализированных физико-математических школ.

Очень важно, чтобы актуальные для нашего времени идеи гуманизации среднего образования, в связи с возможным их неправильным пониманием и осуществлением, не сказались отрицательно на потенциале нашей страны, на ее научно-техническом прогрессе в области естествознания и техники, на развитии психологии и социологии (которые, вопреки распространенному у нас мнению, являются естественнонаучными дисциплинами, требующими серьезной математической, в особенности статистической, подготовки специалистов).

Гуманизацию среднего образования нельзя сводить к увеличению уроков на гуманитарные предметы за счет естественно-математических. Гуманизация образования прежде всего связана с воспитанием четких представлений об этических нормах и осознанием невозможности отступления от них.

Научное мировоззрение нуждается в этике так же, как и житейская практика. Оно не может существовать, не поддерживая честно-сти в поступках и стремлениях. Если речь идет о поисках научной истины, то никакие сопутствующие соображения не должны приниматься в расчет. Теоретические рассуждения, результаты экспериментов и наблюдений должны быть многократно проверены. Если эксперимент не подтвердил теорию, то, как бы привлекательна ни была теория, ее нужно пересмотреть. Точно так же при выборе инженерной конструкции или технологического процесса можно руководствоваться только качеством изделий и совершенством конструкции. К сожалению, в жизни нередко случается, что даже авторитетные комиссии отдают предпочтение далеко не лучшим решениям из-за того, что в их пользу высказываются лица, занимающие высокие посты. В результате такой соглашательской политики общество несет огромные потери — моральные, энергетические, финансовые, экологические и пр.

Как часто наша промышленность выпускает изделия, морально устарелые, конструктивно неполноценные, собранные небрежно. Работоспособность и надежность этих изделий неудовлетворительны, значительную часть времени они находятся не в работе, а в ремонте. Это приводит к расточительству: теряется сырье, бездумно тратятся станочное время и электроэнергия, впустую расходуется труд людей. Такое производство следует назвать своим именем — безнравственным, аморальным.

С такими явлениями надо покончить как можно быстрее, но одних экономических мер явно недостаточно. Необходимо обратить особое внимание на воспитание нравственных принципов. Они должны с раннего детства прививаться человеку. Каждый гражданин обязан понять и почувствовать, что нарушение нравственных норм несовместимо с человеческим достоинством. За нравственное воспитание следует приниматься без промедления, так как без этого не будут осуществлены ни экономические, ни трудовые реформы, не будут обеспечены свобода и спокойствие граждан. Эта работа должна стать основой деятельности каждой школы, одной из основных задач каждого преподавателя.

Математика, в силу своей специфики, обладает особыми возможностями для воспитания нравственных принципов, настойчивости в достижении цели, ответственности за порученное дело. На уроках математики у учащихся вырабатывается привычка к тому, что любая ошибка в вычислениях, любая неточность в рассуждениях не останется незамеченной. В математике любое задание имеет четкую цель — найти решение задачи, провести доказательство теоремы, дать определение понятия. И каждый учащийся может четко ответить самому себе: в состоянии он справиться с заданием или нет у него для этого достаточных знаний и умений. Таким образом, каждый ученик может достаточно точно и объективно оценить объем своих знаний и меру усилий, вложенных в работу, т. е. дать себе самооценку, столь важную для формирования личности.

Один из крупнейших педагогов и математиков нашего времени Александр Яковлевич Хинчин в свое время неоднократно отмечал, как прочно сидят в нем привычки, свойственные математику. Для него было органически невозможно сделать что-либо не до конца, небрежно, безответственно. Он говорил также, что он не может отстаивать нечто, имеющее множество толкований. И это действительно было так. Он не требовал для своих идей какого бы то ни было приоритета, не отстаивал мнений, которые можно было бы толковать во вред другому.

Теперь несколько слов, связанных с личными воспоминаниями. Во всей истории научной деятельности коллектива механико-математического факультета Московского университета считалось обязательным делиться как с коллегами, так и со студентами своими замыслами, научными находками, а при получении новых результатов указывать те истоки, которые привели к этому открытию, называть имена иностранных или отечественных коллег, идеи и результаты которых были использованы. Этим самым молодое математическое поколение приучалось к творчеству, к нравственности, принципиальной невозможности без указания автора использовать результаты другого лица. Бывшие студенты и аспиранты факультета благодарны коллективу преподавателей не только за знания, но и за то нравственное воспитание, которое они приобретали исподволь, в результате повседневного общения с математиками старшего поколения. Так передавались от поколения к поколению морально-этические нормы, выработанные на факультете.

Для подтверждения опишу случай из моей жизни. Перед Великой Отечественной войной в МГУ каждый аспирант в последний год обучения должен был написать реферат по истории или философии своей науки. Почти год я собирал материал для своей темы — «Из истории русской математики». В результате был подготовлен реферат страниц на 200, написанный от руки. В начале 1937 г. я передал его профессору С. А. Яновской — руководителю семинара по истории и философии математики. Затем у меня были тревоги и волнения, связанные с началом педагогической работы, призывом и службой в Советской Армии, защитой кандидатской, а потом и докторской диссертации. Грянула война, и мне пришлось переключиться на решение задач оборонного характера. Для С. А. Яновской эти годы тоже были сложны — она долгие месяцы провела в больнице, потом уехала в эвакуацию. В результате мы встретились только в конце 1943 г. Каково же было мое удивление, когда она мне сказала: «Борис Владимирович! Я брала в эвакуацию Вашу рукопись. Теперь возвращаю ее Вам для доработки и превращения ее в книгу. Такая книга нужна. Ведь ничего подобного у нас еще нет». Я полностью позабыл об этой работе, и она бы наверняка пропала, если бы Софья Александровна не сохранила ее в течение шести труднейших лет. Во время эвакуации она захватила рукопись с собой, боясь, что чужой труд пропадет, но отказав себе в лишнем килограмме так необходимых личных вещей. Для нее священен был труд другого, высшую ценность представляло то, что могло хотя бы минимально продвинуть наши знания. Свою рукопись я доработал, и в 1946 г. вышли из печати «Очерки по истории математики в России». Для меня этот случай навсегда останется ярким примером высоконравственного отношения к человеку и к делу. Именно такое отношение, такая атмосфера взаимного творческого общения должны быть созданы в каждом педагогическом коллективе как высшей, так и средней школы.

Сейчас, когда перед страной остро стоят проблемы научно-технической революции, экономического и нравственного возрождения, особую роль в жизни общества приобретают школа, образование, воспитание у молодежи высоких принципов морали и интереса к познанию и творчеству. В этих условиях особую озабоченность и тревогу вызывает высказываемые иногда в печати предложения освободить часть нашей молодежи от изучения физико-математических дисциплин, сделать эти предметы необязательными на последней стадии обучения в школе. Такое решение неизбежно приведет к резкому падению логического воспитания и к стремлению части молодежи ограничиваться в своем общем образовании чисто гуманитарными предметами. Тем самым будет уменьшен интеллектуальный потенциал страны, поскольку пренебрежение точными количественными методами познания помешает не только инженерно-техническому развитию, но и успешному решению экологических и социологических проблем.

Конечно, наша школа повинна в том, что пошла на поводу у командно-административной системы и согласилась выставлять учащимся положительные оценки за недостаточные знания. Недаром стало распространенным выражение: «Тройку пишем, два в уме». Не секрет, что особенно часто держать «два в уме» приходилось учителям русского языка и математики. Это дорого обошлось (и обходится) нашей стране, способствовало появлению в новом поколении таких людей, которые не приучились работать и требовать всего от себя, но зато требуют всего от общества. Нам нужно как можно скорее отказаться от этого страшного пережитка недавнего прошлого и с раннего детства приучать каждого к полной ответственности, моральной чистоплотности и готовности к труду.

В наше время любое воспитание и образование, в том числе нравственное, научно-методологическое и общегражданское, нуждается в совместном и согласованном воздействии гуманитарных, естественнонаучных и математических дисциплин. Нам следует систематически выступать против одностороннего и узкого представления авторов некоторых публикаций, отказывающих математике и физике в возможностях воспитывать моральные качества, формировать нравственность. Эта ошибочная точка зрения, если она будет осуществлена, приведет к ослаблению научно-технического и оборонного потенциала страны. Другое дело — совершенствование преподавания этих дисциплин, укрепление их связи с практикой, с жизненными проблемами нашего общества, с идейно-методологическим и нравственным воспитанием.

## ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ

# К вопросу о воспитании графической культуры учащихся

**С. М. Абрамович** (Ленинград)

В самом начале учебного года, желая узнать уровень подготовки учащихся, поступивших в IX класс школы с углубленным изучением математики, я предложил решить совсем простое, на мой взгляд, неравенство $\frac{1}{x}>x$. Казалось бы, вчерашние отличники обычных восьмилеток (а именно они представляют собой основной состав математической школы) должны быстро справиться с такой задачей. Однако это оказалось далеко не так. Одни без оговорок умножали обе части неравенства на $x$, другие, зная об особенности такого преобразования, застревали при сведении неравенства $\frac{(1-x)(1+x)}{x}>0$ к совокупности систем двух линейных неравенств, третьи неверно расставляли знаки в схеме метода интервалов. Вопрос оставался открытым до тех пор, пока одна девочка, нарисовав графики функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=x$ и найдя корни уравнения $x^2=1$, «считала» с рисунка (рис. 1) решение: $-\infty<x<-1$, $0<x<1$. Наглядность и простота этого решения ни у кого не вызвала сомнения. По-видимому, девочке в ее школе по месту жительства было привито то, что можно назвать графической культурой учащегося, которая, как показал опрос, отсутствовала у большинства собранных в один класс учащихся разных ленинградских школ.

Описанный здесь случай, очевидно, типичен. Это и послужило причиной написания настоящей заметки, ставящей своей целью обратить внимание заинтересованного читателя на убедительные примеры простоты и наглядности графических решений алгебраических неравенств, часто встречающихся в школьной педагогической практике.

Хорошо известны трудности, с которыми сталкиваются школьники при решении даже простейших иррациональных неравенств, так как аналитические соображения, которые приходится здесь привлекать, связаны уже с самим знаком неравенства. Рассмотрим неравенство $\sqrt{x}>1-x$. Всегда ли легко обычному ученику составить равносильную совокупность двух систем рациональных неравенств

$$\begin{cases} 1-x\geqslant 0 \\ x>(1-x)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ 1-x<0 \end{cases}$$

*Рис. 1*

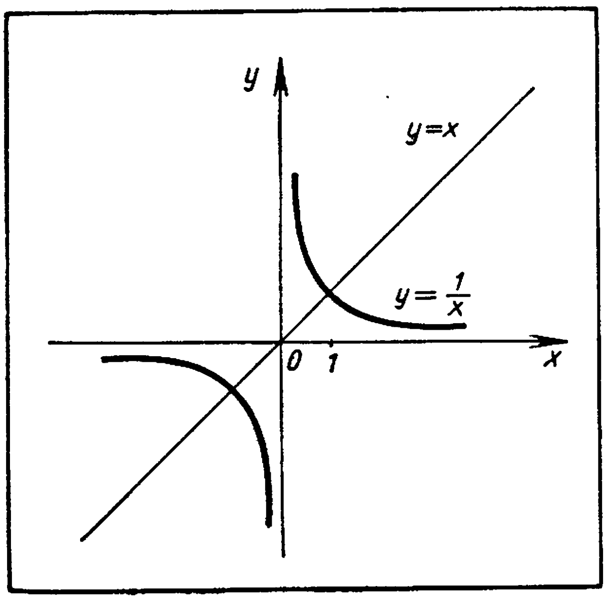
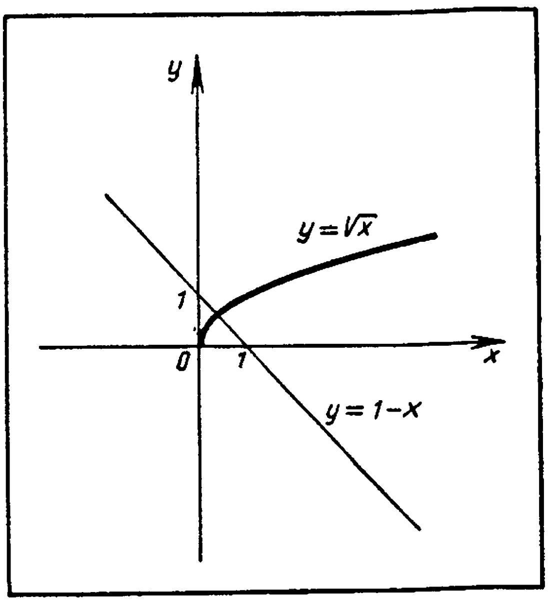



*Рис. 2*



(при этом, даже при верно составленной первой системе, о второй часто забывают) и довести все вычисления до конца? В то же время, изобразив нетрудно поддающиеся восприятию и запоминанию графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=1-x$ и найдя по рисунку (рис. 2), очевидно единственный корень иррационального уравнения $\sqrt{x}=1-x$, ученик сразу увидит на картинке, что график функции $y=\sqrt{x}$ лежит выше прямой $y=1-x$ только на промежутке $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$. Попутно заметим, что так называемая ОДЗ в уравнении $\sqrt{x}=1-x$ от постороннего корня не спасает. Он обнаруживается с помощью дополнительных соображений: легко наблюдаемый факт встречи графиков до пересечения прямой с осью абсцисс в точке $x=1$ моментально позволяет увидеть посторонний корень.

Агитируя за графический метод решения неравенств, нельзя не указать на его эффективность в случае неравенств, содержащих модули, аналитическое решение которых зачастую требует утомительных рассмотрений неравенства на интервалах знакопостоянства функций, стоящих под знаком модуля. В качестве примера решим неравенство $|3x^2-1|<|x-3|$, для чего построим графики функций $y=|3x^2-1|$ и $y=|x-3|$ (рис. 3). Примечательно, что теоретический багаж, необходимый для нахождения абсцисс характерных точек, ограничивается знанием формулы корней квадратного уравнения. Теперь остается заметить, что лишь для значений $x\in\left(-\frac{4}{3};\ 1\right)$ график правой части иашего неравенства расположен над графиком его левой части, т. е. что указанный промежуток и представляет собой искомое множество

*Рис. 3*

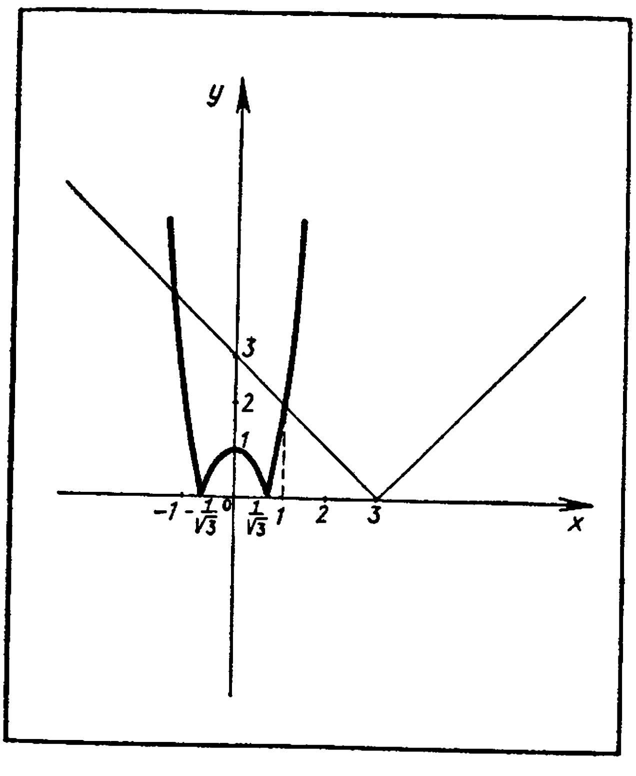
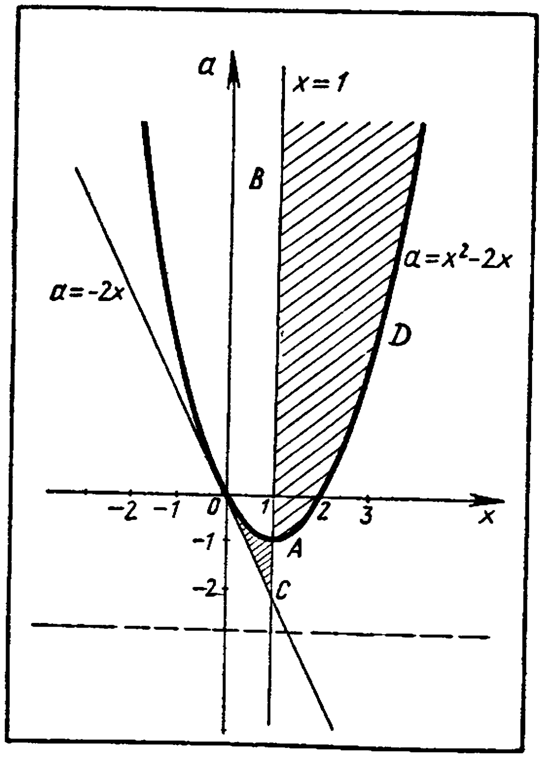



*Рис. 4.*



решений. Справедливости ради надо признать, что в случае, когда горб, возникший у параболы под действием модуля, пересекает соответствующую прямую, наше «считывание» ответа с картинки затягивается. Но и аналитическое решение соответствующего этой картинке неравенства также усложняется.

Конечно же не в каждом случае неравенство «берется» сходу добросовестным вычерчиванием графиков его левой и правой части. Однако и здесь оказывается несложным выполнить предварительную доводку неравенства до графической кондиции. Остановимся в связи с этим на неравенстве $\log_x(2x+a)>2$, решения которого требуется найти в зависимости от значений вещественного параметра $a$. Используя предварительно свойства монотонности логарифмической функции, которые опять же наглядно демонстрируются на графиках, зависящих, очевидно, от основания логарифма, заменяем исходное неравенство равносильной совокупностью двух систем

$$\begin{cases} x>1 \\ 2x+a>x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 0<x<1 \\ 0<2x+a<x^2. \end{cases}$$

Переписав неравенства в виде

$$\begin{cases} x>1 \\ a>x^2-2x \end{cases} \quad \begin{cases} 0<x<1 \\ a<x^2-2x \\ a>-2x \end{cases}$$

и рассматривая их как неравенства относительно двух переменных, построим на координатной плоскости $(x, a)$ множества решений этих двух систем (рис. 4).

Представим уравнения границ заштрихованных областей в виде зависимостей $x$ от $a$. Имеем: $x=1-\sqrt{1+a}$ $(OA)$, $x=-\frac{a}{2}$ $(OC)$, $x=1$ $(CAB)$, $x=1+\sqrt{1+a}$ $(AD)$. Решение неравенства завершается описанием заштрихованных областей, изменение уравнений границ которых легко наблюдать, перемещая на плоскости прямую параллельно оси абсцисс вдоль оси ординат. Таким образом, при $a\leqslant-2$ решений нет, при $-2<a<-1$: $-\frac{a}{2}<x<1$, при $-1\leqslant a\leqslant 0$: $-\frac{a}{2}<$ $<x<1-\sqrt{1+a}$ или $1<x<1+\sqrt{1+a}$ и, наконец, при $a>0$: $1<x<1+$ $+\sqrt{1+a}$.

Рассмотренные примеры позволяют сделать вывод, что графическая методика сводит задачу решения неравенств к равносильной задаче построения графиков с одновременным решением соответствующих уравнений, которая во многих случаях оказывается проще исходной и оправдывает целесообразность обучения учащихся такому сведению.

# Одна из форм коллективной деятельности учащихся

**А. И. Грузин, А. Ф. Кузнецова,**
**Е. Я. Михеева** (г. Харьков)

Перестройка школы предполагает прежде всего изменения в процессе обучения взаимоотношений учителя с учащимися и взаимоотношений между самими учащимися. Один из путей изменения этих взаимоотношений, на наш взгляд,— организация коллективной деятельности учащихся в процессе обучения.

Как известно, «Деятельность школьников является коллективной если: цель деятельности осознается как единая, требующая объединения усилий всего коллектива; организация деятельности предполагает известное разделение труда; в процессе деятельности между членами коллектива образуются отношения взаимной ответственности и зависимости; контроль над деятельностью частично осуществляется самими членами коллектива»*.

Реализация стремления учащихся к сотрудничеству формирует их личность (самоутверждение, самоанализ, самооценка) при условии, если учителем специально организовано межличностное общение в учебной деятельности.

Одной из форм коллективной деятельности учащихся на уроке является работа в паре. Принцип работы в паре состоит в передаче на период такой работы учащимся функций, традиционно выполняемых учителем: информационных, организационных, контрольных и частично оценивающих. Пары могут быть постоянного и сменного состава.

При отборе школьников в пару постоянного состава следует учитывать их психологическую совместимость. Как показывает практика, нецелесообразно составлять пару постоянного состава из двух слабоуспевающих учеников. Нужно, чтобы один из учащихся имел более высокий уровень готовности к учению.

Результативность парной работы во многом зависит от систематичности ее проведения.

Приведем примеры работы в паре постоянного состава.

На завершающем этапе изучения темы «Основные свойства простейших геометрических фигур» (VII кл.) целесообразно организовать работу в паре постоянного состава с листом взаимного контроля.

*Лист взаимного контроля по теме*
*«Основные свойства простейших геометрических фигур»*

1. Проведите прямую *a*, отметьте и обозначьте несколько точек, принадлежащих прямой *a*, и несколько точек, не принадлежащих пря-

---

* *Виноградова М. Д., Первин И. Б.* Коллективная познавательная деятельность и воспитание школьников. М., 1977. С. 7—8.

мой $a$. Сформулируйте первое основное свойство принадлежности точек и прямых.

2. Отметьте две точки $A$ и $B$, проведите с помощью линейки прямую $AB$. Сформулируйте второе основное свойство принадлежности точек и прямых.

3. Проведите две прямые $a$ и $b$, пересекающиеся в точке $C$. Объясните, почему две различные прямые $a$ и $b$ не могут иметь две точки пересечения $C$ и $D$.

4. Проведите прямую $a$. Отметьте на прямой $a$ две точки $A$ и $C$ и точку $B$, лежащую между точками $A$ и $C$. Сформулируйте основное свойство взаимного расположения точек на прямой.

5. Проведите прямую $a$, обозначьте образовавшиеся полуплоскости $\alpha$ и $\beta$. Сформулируйте основное свойство взаимного расположения точек на плоскости. Отметьте точки $A$, $B$ и $C$ так, чтобы отрезок $AC$ пересекал прямую $a$, а отрезок $AB$ не пересекал ее. Каким свойством обладает разбиение плоскости на две полуплоскости?

6. Постройте отрезок $AB$, равный 5 см, отметьте точку $C$, принадлежащую отрезку $AB$. Сформулируйте основные свойства измерения отрезков.

7. Постройте $\angle ABC=120°$ и развернутый угол $MON$, проведите луч $BK$, проходящий между сторонами $\angle ABC$. Сформулируйте основные свойства измерения углов.

8. Постройте полупрямую $a$, от ее начальной точки $A$ отложите на полупрямой $a$ отрезок $AB$, равный 4 см. Сформулируйте основное свойство откладывания отрезков.

9. Проведите полупрямую $a$ и дополнительную полупрямую $a_1$, отложите от полупрямой $a$ в любую из образовавшихся полуплоскостей $\angle(ab)$, равный 80°. Сформулируйте основное свойство откладывания углов.

10. Что означает выражение: «Треугольник $MND$ равен треугольнику $KEP$»?

11. Проведите прямую $a$ и отметьте точку $B$, не принадлежащую прямой $a$. Проведите с помощью угольника и линейки через точку $B$ прямую $b$, параллельную прямой $a$. Сформулируйте основное свойство параллельных прямых.

Как показывает опыт работы, задачи на применение аксиом не вызывают затруднений у учащихся, если рассматриваются непосредственно после соответствующих аксиом, а не в конце изучения темы. Поэтому полезно, во-первых, выделить в конце изучения темы несколько уроков на решение задач (когда уже есть полный список аксиом), во-вторых, организовать плодотворное повторение аксиом. Этому и должна способствовать парная работа с листом взаимного контроля, которую можно организовать, в отличие от работы с листами взаимного контроля, предлагаемыми В. Ф. Шаталовым, без предварительной подготовки.

Следуя концепции планирования обязательных результатов обучения, мы не включали в такие листы требования сформулировать определения отрезка, полупрямой и др., так как для решения задач учащимся достаточно владеть конструктивными определениями этих понятий.

Перед началом работы с листом взаимного контроля учащимся сообщается, содержание каких вопросов они будут объяснять своему партнеру: более подготовленным ученикам предлагается раскрыть содержание вопросов 3, 5, 7, 9, 11, менее подготовленным — содержание вопросов 1, 2, 4, 6, 8, 10. Затем учащиеся объясняют друг другу содержание вопросов в последовательности, указанной в листе. Необходимые записи и рисунки выполняются на черновике, формулировки аксиом и определений даются устно. В случае затруднений плохо подготовленному ученику разрешается под руководством более сильного ученика найти соответствующий материал в учебном пособии.

После этого учащиеся оценивают работу друг друга. При этом учитываются: 1) качество раскрытия содержания материала по каждому вопросу листа взаимного контроля; 2) уровень самостоятельности учащихся.

Опишем, как можно организовать работу в паре постоянного состава на уроке формирования умений и навыков (алгебра и начала анализа, X кл.). Класс делится поровну на две группы. Сообщается, что первая группа должна стать специалистами по вычислению производных дробно-рациональных функций, а вторая группа — специалистами по вычислению производных тригонометрических функций. Каждой группе учащихся дается перечень упражнений, выполнив которые они могут хорошо овладеть данными темами. Перед уроком учитель проводит консультации по группам: решает примеры и задачи, вызвавшие затруднения учащихся, отвечает на вопросы. Работа на уроке организовывается следующим образом. В начале урока учащимся предлагается выполнить самостоятельную работу на тот учебный материал, по которому они должны будут стать специалистами. Задания даются на карточках, при их составлении учитывается уровень подготовки каждого ученика. Приведем примеры таких карточек.

Карточка 1. 1. Найти производную функции $y=(2x^2-3x+7)^4$; 2. Вычислить значение производной в указанной точке: $f(x)=x-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{2x^5}$; $f'(1)=?$ 3. Найти производную функции $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$.

Карточка 2. 1. Вычислить значение производной в указанной точке: $f(x)=\frac{\sin x}{1-\cos x}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$ 2. Найти производные функций: а) $y=\sin 2x\cdot\operatorname{tg} x$; б) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

После самопроверки, ориентиром для которой служат ответы, написанные на обратной стороне карточек, осуществляется работа в паре. Ученик $A$ — специалист по вычислению производной дробно-рациональной функции — учит ученика $B$ — специалиста по вычислению производной тригонометрической функции — решать задачи из карточки 1, попутно объясняя теорию и отвечая на вопросы ученика $B$. Записать решения упражнений, необходимые формулы ученик $A$ может прямо в тетради ученика $B$. Затем таким же образом ученик $B$ учит ученика $A$ решать упражнения из карточки 2. После этого учащиеся обмениваются заданиями: ученик $A$ получает карточку с заданиями, аналогичными заданиям карточки 2, а ученик $B$ карточку, аналогичную карточке 1. При выполнении этих заданий в случае необходимости они могут обращаться за консультацией друг к другу. Затем осуществляются взаимная проверка и последующий анализ работы товарища: указываются и исправляются допущенные ошибки, объясняются их причины.

После этого следует оценить результаты деятельности своего товарища по следующим критериям (ученик $A$ оценивает ученика $B$):

1. Качество выполненной первой самостоятельной работы.

2. Качество объяснения учебного материала учеником $B$ (знание содержания, умение последовательно, глубоко и доступно его изложить, качество второй самостоятельной работы, выполненной самим учеником $A$).

3. Качество выполнения второй самостоятельной работы учеником $B$.

4. Уровень самостоятельности ученика $B$ при выполнении второй самостоятельной работы.

Затем следуют самоанализ и самооценка своей деятельности (например, ученика $A$) по следующим критериям:

1. Качество выполнения первой самостоятельной работы.

2. Качество объяснения своей темы ученику $B$ (об этом может свидетельствовать количество задаваемых вопросов учеником $B$ по ходу объяснения, качество второй работы, выполненной учеником $B$).

3. Качество второй самостоятельной работы, выполненной самим учеником $A$.

4. Уровень самостоятельности ученика $A$ при выполнении второй самостоятельной работы.

Отметка за работу может быть выставлена дробью: в числителе — результат оценивания работы товарищем, в знаменателе — результат самоанализа и самооценки.

Как показывает практика, систематическая организация деятельности учащихся в паре способствует более глубокому усвоению учебного материала: ученик, проговаривая информацию, лучше ее усваивает. Кроме того, работа в паре способствует рождению интереса к процессу учения, возникает чувство удовлетворенности не только результатом, но и самим процессом учения.

# Предварить изучение нового

**Е. Н. Михайлова (Ленинград)**

Как помочь учащимся легче воспринимать новый материал, как сделать, чтобы они меньше совершали ошибок? Задумываясь над этим, поняла, что только тогда, когда учитель знает трудности учеников, проблему можно решить.

При изучении ряда тем программы требуется сформировать навыки, которые для учащихся являются сложными и требуют от них, в свою очередь, овладения некоторыми вспомогательными навыками. Так, например, для того чтобы научиться пользоваться формулой квадрата суммы двух слагаемых, учащиеся должны научиться находить сами слагаемые, их квадраты, их произведение и удвоенное произведение. Опыт показывает, что овладеть одновременно и вспомогательными навыками, и основным навыком не всем учащимся оказывается под силу.

В своей работе пользуюсь следующим методом. Примерно за 2—3 недели до изучения нового материала начинаю на устных упражнениях готовить ребят к его восприятию. Так, перед изучением упомянутой выше формулы квадрата суммы двух слагаемых система упражнений следующая. Показываю ученикам сумму $a+3$, прошу назвать первое слагаемое, второе; показываю $b-5$ — задание аналогичное. На следующем этапе выписываю на доске в столбик 10 различных сумм, прошу назвать слагаемые, квадрат первого слагаемого или квадрат второго слагаемого (причем не обязательно сначала первого). Смотрим с учениками и убеждаемся еще раз, что квадраты любых чисел положительны. На следующих уроках закрепляю умение находить слагаемые, их квадраты и прошу найти произведение первого слагаемого и второго. Задания чередуются и даются выборочно для написанных заранее на доске сумм, учитель только показывает сумму и сообщает задание. (Это может делать и сильный ученик.) Далее ввожу понятие удвоенного произведения слагаемых. Закрепление полученных навыков продолжается еще на двух уроках. В итоге после вывода формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ ребята оказываются способными находить результат сразу (например, $(2a+3)^2=4a^2+12a+9$, а не $(2a)^2+2\cdot 2a\cdot 3+$ $+3^2$), не делают ошибок в знаках, не забывают просчитывать $2ab$.

Изучению темы «Декартовы системы координат» в моей работе предшествует игра в морской бой. На доске постоянно находится фон всем известной детской игры. Нужно попасть в корабль — назвать корабль с помощью буквы и цифры, обязательно начиная с буквы. На следующем этапе прошу называть местоположение флажков, расположенных на пересечении горизонтальных и вертикальных линий, первые из которых обозначены цифрами, а вторые — буквами. Опять требую называть сначала букву, а потом цифру. Третий этап: вместо букв записываем цифры, но называем сначала цифры, которые появились вместо букв (т. е. те, которые записаны по горизонтали). Играем в различные игры: установи флажок; узнай, где клад. Двое у доски: один называет точку, второй ее показывает, а класс реагирует на правильность выполнения задания поднятием руки. Прежде у моих учеников возникала трудность, связанная с выбором порядка чисел $(x, y)$. После подобных упражнений трудность исчезала.

Предварительные упражнения хорошо помогают восприятию формулы корней квадратного уравнения. Использую такую их систему:

1) Выписываю различные квадратные трехчлены и поясняю, что есть $a$, что — $b$, что — $c$. Затем ученики находят $a$, $b$, $c$ для нескольких трехчленов. На первых уроках только называем коэффициенты (выписываю по 10 различных трехчленов).

2) Называем $a$, $b$, $c$ и вычисляем $b^2$ (на одном уроке).

3) Вычисляем $b^2$ и $ac$. Это делаем на одном уроке. На другом уроке прошу учащихся найти $\frac{b}{2}$ и $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ для тех трехчленов, у которых $b$ — четное число. В дальнейшем ученики сами выбирают, что возводить в квадрат. $b$ или $\frac{b}{2}$ — учитель только указывает один из выписанных заранее трехчленов.

4) Вычисляем $4ac$, а также повторяем вычисление $b^2$, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

5) Находим значение $b^2-4ac$ или $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ (дети приучаются сами выбирать, что именно). Упражняемся на трех-четырех уроках. К моменту вывода формулы корней квадратного трехчлена у всех учеников оказывается сформированным навык нахождения $D=b^2-4ac$ и $\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$.

Такие упражнения, проводимые в течение 5—7 мин в начале урока, мобилизуют всех ребят, они кажутся простыми и являются доступными для всех. Даже у самых слабых учеников появляется надежда на то, что и они могут сделать что-то на уроке. Таким образом достигается еще одна цель — работа на уроке всех ребят, при этом отступает боязнь, появляется уверенность в себе и вера в учителя. В тех же классах, которые веду в течение нескольких лет, ребята начинают понимать, что ничего на уроке не делается зря, все пригодится в будущем.

## Как ликвидировать пробелы в знаниях

**З. П. Декопольцева (г. Северодвинск)**

Хочу поделиться своим опытом работы по ликвидации пробелов в знаниях учащихся. Считаю, что учителю для успешной работы с каждым учеником необходимо знать его домашние условия для учебной работы, пробелы в знаниях и их причины, учитывать его интерес к предмету, взаимоотношение с классным коллективом и непосредственно с учителем.

Основные причины существующих пробелов в знаниях учащихся, на мой взгляд, следующие: 1) отставание в умственном развитии от своих сверстников; 2) невнимательность на уроках, непонимание до конца излагаемого материала; 3) большое количество пропусков по болезни; 4) мастерство учителя — преподавателя и педагога; 5) перегрузка домашним заданием.

О двух последних причинах достаточно сказано в педагогической литературе. Поэтому остановлюсь только на первых трех причинах неуспеваемости учащихся.

Отставание в умственном развитии от своих сверстников. К этой категории следует отнести детей с замедленным умственным развитием или со слабым умственным развитием. Что скрывать, с такими детьми приходится работать в обыкновенном классе. А ведь эти дети возбудимы, легкоранимы, быстро утомляются в процессе умственного труда. Поэтому необходимо создавать в классе такой микроклимат, чтобы и они, и их товарищи не чувствовали большой разницы в своем умственном развитии, исключить всякое унижение и презрение по отношению к этим детям. Предлагаю несколько методических приемов.

1) Самый удобный способ проверки знаний таких учащихся — это карточки, перфокарты и т. д. Но при такой форме опроса необходимо дать еще ряд карточек и другим учащимся (задания, естественно, дифференцированные), чтобы у класса создалось впечатление, что проверяется по теме целая группа ребят.

2) Хороший стимулятор в работе с такими учащимися — коллективный урок в сменяющихся парах. Эта форма работы освещалась на страницах журнала «Математика в школе» и на страницах «Учительской газеты».

3) Помогают в работе с такими учащимися карточки взаимного контроля, который может быть проведен и по теоретическим вопросам, и по практической части. Например, для проверки умений и навыков работы с обыкновенными дробями класс разбивается на пять групп. Одна группа проверяет умение складывать, другая — вычитать, третья — умножать, четвертая — делить, пятая — решать примеры на все действия с дробями. Каждый учащийся группы получает от учителя карточку с заданием и контрольную карточку, в которой указываются фамилия ученика, номер его группы и его оценка за выполнение задания. Для каждой группы проводится консультация учителя по заданиям карточки, проверяется решение заданий. Затем каждый ученик обязан проверить умение решать задание его карточки у четверых человек — у одного учащегося каждой из оставшихся групп (с учетом, чтобы фамилии не повторялись) — и оценить их знания.

Итак, каждый ученик получает по пять оценок — одну у учителя и четыре у товарищей. Заполненные контрольные карточки сдаются учителю, и результаты сводятся в общую ведомость для обзора.

4) Эффективна «цепочная» отработка практических навыков при изучении нового материала. Суть ее заключается в том, что решение новых примеров комментируется учениками по цепочке. При этом исправлять решение имеет право только учитель.

Невнимательность на уроках, непонимание до конца излагаемого материала. Одна из проверенных форм работы с учащимися в этом случае — подготовительные консультации перед изучением новой темы. Учитель знакомит ребят с темой следующего урока и повторяет с ними тот старый материал, который нужен для изучения этой темы.

Если учащиеся имеют пробелы по текущим вопросам, то можно предложить следующие формы работы с ними.

1) Парные диалоги с целью проверки теоретических знаний. В начале урока в течение пяти-семи минут учащиеся, сидящие за одной партой, проверяют друг у друга знание изученного теоретического материала. Они отвечают на поставленные товарищем вопросы, исправляют друг друга и оценивают.

2) Коллективный контрольный урок в сменяющихся парах. Перед таким уроком дома учащиеся готовят карточки с заданием для товарищей по данной теме. Они придумывают или подбирают упражнения и решают их. В классе каждый учащийся решает задания по карточкам товарищей, а те его проверяют и оценивают. При этом ставится цель — «обойти» как можно больше одноклассников.

3) Работа в группах. При отработке практических навыков по какой-либо теме создаются смешанные (по силе) группы. Работа ведется методом обсуждения. Если задания у группы одинаковые, то можно в конце урока провести общую консультацию по решению упражнений. Если задания разные, то для самопроверки учитель должен дать контрольную карту. В конце урока в группе обсуждается участие в работе каждого ученика и ему выставляется соответствующая оценка.

4) При проверке домашнего задания ошибки ребят не только подчеркиваются и исправляются учителем, но и письменно рецензируются им в тетради.

Если отрабатываются сложные темы типа «Решение примеров с дробями на все действия», «Алгебраические преобразования дробных выражений», учащиеся оставляют широкие поля для рецензии ошибок. Если задание не получается, учащийся ставит знак вопроса, а учитель решает это задание прямо в тетради ученика. Эти работы проверяются ежедневно и у каждого ученика.

Большое количество пропусков по болезни. В данном случае необходимы послеурочные консультации.

Но я в обязательном порядке использую метод «контрольных карт». После болезни ученик получает контрольную карту с вопросами и заданиями по пропущенной теме. Кто-нибудь из товарищей обязательно согласится помочь ему ответить на теоретические вопросы и решить практические задания. Контрольная карта вывешивается в классе для того, чтобы все ребята видели, что пробел в знаниях их товарища ликвидирован.

Вообще бороться с пробелами и ребячьей ленью помогает наглядный графический учет знаний учащихся. И еще — класс должен быть единым рабочим коллективом, а не сборищем индивидуумов, болеющих только за свой личный успех.

# Тематический контроль и учет знаний

**Б. Б. Баймуханов (Алма-Ата)**

Проверка и учет знаний, умений и навыков учащихся — важные составные части учебного процесса. Это основные средства, с помощью которых учитель устанавливает, как учащийся усваивает программный материал, продвигается в своем развитии.

Однако очень часто проверка проводится «вслепую», по принципу «кто давно не был опрошен». Ученик получает неудовлетворительную оценку по одной теме, а исправляет ее ответом уже по другой теме. В результате многие вопросы математики остаются неусвоенными, нарушается структурная цельность знаний по курсу.

Опыт работы учителей показал, что тематическая структура содержания образования и тематическое осуществление процесса обучения требуют такого же тематического подхода к проверке и учету знаний учащихся.

Для осуществления такого подхода темы, рассчитанные на большое количество часов (15 и более), предлагается разбить на отдельные подтемы, рассчитанные на 5—10 ч.; темы, рассчитанные на 1—2 урока,— объединить. При этом распределение тем осуществляется в соответствии с логической структурой курса.

Важное место при тематическом контроле занимает вопрос о системе фиксации результатов проверки и оценки. Учителя могут использовать определенную форму хранения информации (журнал) о результатах обучения каждого школьника, позволяющую регулярно фиксировать как текущие, так и итоговые оценки по каждой теме. Страница такого журнала для учета знаний учащихся X класса по алгебре и началам анализа имеет вид, указанный в таблице.

Как видно из таблицы, страницы журнала, предназначенные для учета успеваемости, делят на колонки. Колонок столько, сколько тем в четверти. Колонки, предназначенные для каждой темы, делят на две «подколонки» для «текущих» и «итоговых» оценок. Количество столбцов в «подколонке» для текущих оценок соответствует количеству часов, Таблица

**Страница журнала**

| Название темы | Преобразования тригонометрич. выражений (повторение) | | Основные свойства функций | | Основные свойства тригонометрич. функций | | Оценка за I четверть |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Виды оценок | Текущие | Итоговые | Текущие | Итоговые | Текущие | Итоговые | |
| Номера уроков Фамилия учащегося | 1 2 3 4 ... | 1 2 3 | 1 2 ... | 1 2 3 | 1 2 3 ... | 1 2 3 | |

отведенных на тему программой, плюс 2—3 дополнительных столбца для выставления оценок по контрольным или самостоятельным работам. (Текущие оценки выставляются в те столбцы, которые соответствуют данному уроку.)

При необходимости учителя могут выделить колонки (или столбцы) для проверки некоторых других аспектов знаний и видов учебной работы. Например, можно вести учет выполнения домашних заданий.

На основании текущих оценок, руководствуясь в основном оценками по проверочным работам, проведенным специально по данной теме, учитель выставляет первую итоговую оценку в первом столбце колонки «итоговая оценка».

Если учащийся по каким-либо причинам не усвоил материал и его первая итоговая оценка неудовлетворительная, то ему предъявляется требование обязательно доработать пройденную тему (при необходимости учитель дает консультацию), определяется срок, проводится повторная проверка (на уроке или во внеурочное время) и оценка выставляется во втором столбце колонки «итоговая оценка».

При таком оценивании неудовлетворительная оценка не может влиять на выставление итоговой оценки по всей теме, так как ученик усвоил материал.

Ученик, имеющий первую итоговую оценку «3» или «4», по желанию может доработать тему. Учитель устанавливает срок и дает проверочную работу, по результатам которой выставляется вторая итоговая оценка.

Если в процессе (систематического, четвертного, полугодового или годового) повторения ученик показал более высокий уровень знаний, ему выставляется новая итоговая оценка в третьем столбце колонки «итоговая оценка».

Оценки за четверть выводятся по последним итоговым оценкам на основании фактического усвоения всех тем с учетом их важности.

Как показывает опыт работы учителей, такой учет знаний, умений и навыков помогает ослаблению отрицательного психологического влияния на ученика неудовлетворительной оценки, стимулирует его к добросовестной учебной деятельности. У учащихся вместо растерянности, угнетенного состояния появляется желание трудиться лучше.

## Найти и преодолеть ошибку

**С. И. Векслер** (г. Одесса)

Однажды мне пришлось присутствовать при беседе двух школьников. Один доказывал другому, что $2\times2=5$. Но тот, другой, никак не мог обнаружить ошибки в рассуждении. В разговоре с этим учеником выяснилось, что он знал все те правила, которые были нарушены в «доказательстве», но не сумел ими воспользоваться, когда потребовалось найти ошибку. В дальнейшем приходилось не раз убеждаться, что это неумение является массовым.

В чем же причина этого явления? Прежде всего в том, что учителя почти всегда предлагают учащимся задания, в которых ошибки исключаются. Это вырабатывает у школьников чрезмерное *доверие ко всем сообщениям,* указаниям, заданиям. А ведь в чертежах и схемах, доказательствах и расчетах, с которыми школьники в будущем встретятся, могут быть ошибки. Если работники не сумеют их найти и проанализировать заранее, то могут быть аварии, брак, серьезные упущения. Поэтому так необходимо формировать у школьников критическую направленность мышления.

Для этого, как показал опыт, необходимо действовать постепенно: сначала научить ребят находить суждение (математическое выражение), в котором имеется ошибка; затем показать, как следует подбирать аргументы, для того чтобы обосновать наличие ошибки, и, наконец, потребовать от учащихся развернутого и последовательного построения опровержений. Установить ложность данного суждения можно путем его сопоставления с законами, правилами, формулами, теоремами, аксиомами, и т. д. Для опровержения необходимо подобрать аргументы, которые должны быть, во-первых, истинными (т. е. точно соответствовать математическим законам), а во-вторых, такими, чтобы из них следовала ложность рассматриваемого суждения.

Способы организации такого обучения мы отрабатывали в одесской школе № 38, в классах, где математику преподавала *Молчанова Валентина Константиновна.* Сначала она давала учащимся самостоятельную работу, в которой требовалось проанализировать несколько суждений. Например: а) если произведение двух чисел четное число, то и сумма этих чисел четная; б) биссектриса угла в равнобедренном треугольнике есть одновременно его медиана и высота.

При анализе утверждения а) многие учащиеся допустили ошибку, считая его истинным. Они не учли, что из двух множителей четного произведения один может быть нечетным, а следовательно, и сумма будет нечетная. Не заметили учащиеся ошибку и в высказывании б), в котором имелась в виду любая биссектриса равнобедренного треугольника, а не только та, что проведена из вершины, противолежащей основанию. Ошибки, не замеченные учащимися, В. К. Молчанова подробно анализировала в классе, советовала не принимать на веру ни одного утверждения, предлагала систему упражнений, которая охватывала как верные задания, так и противоречивые, чтобы развить у учащихся дифференцированный подход к ним.

В классе применялись четыре вида заданий на обнаружение ошибки, разработанных автором этих строк. В заданиях I вида намеренно допущена ошибка в какой-либо теореме (или в правиле), надо найти ошибку и верно сформулировать теорему (правило). В задания II вида входили теоремы, изложенные неполно. От учащихся требовалось выявить незаконные следствия из неполных теорем. Задания III вида содержали задачи с данными, которые противоречили друг другу. Задания IV вида сводились к задачам, содержание которых противоречило определенным условиям.

Постепенно терпеливый инструктаж учителя все более заменялся самостоятельной работой учащихся. Анализ этих работ предшествовал выполнению новых заданий. Шла корректировка работ, выявлялись недостатки и анализировались ошибки. Наконец, в более легких заданиях стали появляться развернутые пояснения учащихся. Приведем одно такое задание и его анализ, сделанный учащимся.

Задача. Ученица хотела купить в магазине 9 тетрадей и 3 карандаша. Продавец выписал чек на 58 коп. Сколько стоит одна тетрадь, один карандаш?

Анализ задачи. Чек выписан неправильно. Если цену одной тетради умножить на 9, то получим число, делящееся на 3. Стоимость карандашей (цена одного карандаша, умноженная на 3) тоже делится на 3. Поскольку оба слагаемых делятся на 3, и сумма должна делиться на 3. Но число 58 не делится на 3, поэтому стоимость карандашей и тетрадей узнать нельзя.

В дальнейшем учительница продолжала реализовывать систему заданий, в которых надо было обнаружить ложные суждения. Эта система охватывала также задачи с ошибками и смешанные задачи (как с ошибками, так и правильные). В результате описанной работы в классе В. К. Молчановой подавляющее большинство учеников не испытывали затруднений при встрече с ложными суждениями и противоречивыми задачами.

Кроме специальной системы заданий большую роль в развитии учащихся сыграла их взаимопроверка. Для нее учительница оставляла значительно больше времени, не 1—2 мин, как иногда можно наблюдать на уроках. Торопливая взаимопроверка сводится лишь к сопоставлению ответов, без всякого анализа решения. Но у В. К. Молчановой каждый школьник мог осмыслить работу товарища и высказать свое мнение о ней, проделав целый ряд логических операций — определение правильности суждений, установление связей между отдельными суждениями, составление вывода.

Во время взаимопроверок учащиеся сначала действовали робко, слабые во всем соглашались с сильными. Но постепенно критическое начало стало преобладать. Учащиеся уже смелее высказывали свое мнение, с большим интересом следили за мыслью товарища.

## Индивидуальные задания по устранению ошибок

**С. Валиев** (г. Куляб)

Положительный эффект индивидуальных заданий несомненен. В них можно учесть особенности каждого ученика, дать сильному трудную задачу, а слабому — простое «алгоритмическое» упражнение. Особенно полезно предлагать индивидуальные домашние задания. Просматривать их лучше всего вместе с теми учащимися, которые их выполняли. По ходу проверки можно задать различные вопросы, вовлекая учеников в беседу.

Одна из главных методических нагрузок индивидуальных домашних заданий состоит в профилактике возможных ошибок и в преодолении уже допущенных. Для того чтобы индивидуальное задание имело точное «попадание в ошибку», учителю нужно вести учет ошибок. По каждой теме целесообразно фиксировать основные затруднения учащихся и в специальной учительской тетради составлять список ошибок учащихся.

Список ошибок обычно пополняется во время проверки контрольных работ. Но полезно также иметь такой список заранее, поскольку в своем большинстве ошибки не оригинальны. По каждой теме они повторяются из года в год. Молодому учителю будет полезно ознакомится с ошибками, которые учащиеся допускают в самом начале изучения курса алгебры. В этой заметке мы не только перечислим типичные ошибки, но и укажем некоторые приемы их устранения, которые можно реализовать в индивидуальных заданиях.

В тождественных преобразованиях целых выражений наиболее распространены следующие ошибки:

учащиеся складывают коэффициенты, а переменные перемножают, например: $9a+3a=12a^2$;

складывают отдельно коэффициенты и отдельно — буквенные выражения, например: $8z+5z=13+2z$;

вычитают коэффициенты, а про буквенные выражения «забывают», например: $5x—4x=1$.

Такого типа ошибки связаны с непониманием распределительного закона умножения относительно сложения и вычитания.

При сложении (вычитании) степеней учащиеся часто складывают (вычитают) и коэффициенты, и показатели степеней. Аналогичная ошибка наблюдается и при умножении (делении) степеней. Например: $3a^2+5a^2=8a^4$, $a^4-a^2=a^2$, $x^3\cdot x^2=x^6$, $m^6:m^2=m^3$.

Для устранения всех этих ошибок мы практикуем задания, в которых от учащихся требуются доказательства истинности или ложности выводов, которые сделали сами учащиеся. Вот некоторые из таких заданий.

Докажите, что в равенствах $b^m+b^n=b^{m+n}$, $2a^3\cdot 3a=18a^2$, $3x+5x+2x=10+3x$ допущены ошибки. Найдите эти ошибки.

Сравните значения выражений $3a^2+5a^2$, $8a^4$, $8a^2$ при $a=1/2$, $a=2$. Объясните, между какими двумя из данных выражений можно поставить знак «=» и почему.

Даны равенства $2a+\square=8a$, $\square\cdot 3a^2=6a^7$. Вставьте вместо квадратиков такие числа или выражения, чтобы равенства были верными. Перечислите свойства чисел, которыми вы при этом пользуетесь.

Среди выражений $17+2x$, $7x+10x$, $20x-3x$, $17x$ найдите такие, которые принимают равные значения при любых значениях $x$.

Рассмотрим теперь ошибки, допускаемые при разложении многочленов на множители.

Вынося за скобки общий множитель, совпадающий с одним из членов многочлена, учащиеся забывают поставить 1 на место этого члена. Так появляются записи вида

$$4a^4b^2+36a^2b^3+4a^2b^2=4a^2b^2(a^2+9b).$$

Если общий множитель — многочлен, то учащиеся часто записывают его дважды. Например:

$$m^2(m+a)-b(m+a)=(m+a)(m+a)(m^2-b).$$

Если общий множитель — разность, то учащиеся могут не учесть, с какими знаками входят в исходное выражение компоненты этой разности. Такая ошибка допущена в преобразовании:

$$x^4-x^3y-y^3+xy^2=x^3(x-y)-y^2(y-x)=(x-y)(x^3-y^2).$$

Для преодоления таких ошибок мы используем следующие индивидуальные задания.

Дан одночлен $18x^4y^6$. Представьте его в виде произведения двух одночленов так, чтобы у первого из них коэффициент был 3, а у второго — множитель $y^3$. Сколько таких произведений можно составить?

Даны одночлены $5x^2y^3$, $25x^3y^4$, $15x^4y^5$. Укажите несколько их общих множителей.

Даны равенства:

$$b^2(x+a)-b^3(...)=b^2(x+a)(1-b);$$
$$m^5(1-n)-m^3(n-1)=m^3(...)(m^2+1).$$

Вместо многоточий поставьте такие выражения, чтобы равенства получились верными.

Выполните умножение: а) $2ax^2(3y+1)$. Вынесите за скобки общий множитель: б) $6ax^2y+2ax^2$. Можно ли поставить знак «=» между выражениями а) и б)?

При умножении многочленов часто встречаются такие ошибки:

$$(a+b)(a+b)=a^2+b^2,\quad (2a+3b)(4c+5a)=$$
$$=8ac+15ab,\ (3ab+1)(3ab-1)=9a^2b^2+3ab.$$

Многие ошибки являются следствием торопливости учителя. Не отработав у учащихся должным образом навыков умножения многочленов, учитель переходит к формулам сокращенного умножения. В торопливости учителя отчасти виновата и слишком насыщенная программа. Сильным учащимся быстрый темп не вредит, а для слабых его можно несколько замедлить, воспользовавшись индивидуальными заданиями. В них целесообразно включать наборы однотипных упражнений на умножение двучленов, двучлена на трехчлен и т. д. Очень полезны задания, в которых требуется возвести двучлен в квадрат или в куб непосредственно, пользуясь определением степени и определением умножения многочленов.

В преобразованиях алгебраических дробей наиболее распространены ошибки, аналогичные тем, которые возникают в действиях с обыкновенными дробями.

При сложении дробей складывают числители и знаменатели:

$$\frac{a+b}{a}+\frac{c-d}{b}=\frac{a+b+c-d}{a+b}.$$

Складывая дроби, забывают умножить их числители на дополнительные множители:

$$\frac{m-n}{m}+\frac{m+n}{n}=\frac{(m-n)+(m+n)}{mn}.$$

Целое выражение прибавляют к числителю без приведения к общему знаменателю:

$$c+\frac{a}{b}=\frac{c+a}{b}.$$

Изменяют знак лишь у первого члена вычитаемого многочлена, забывая изменить его и у последующих членов:

$$\frac{a+b+c}{a-b}-\frac{a-b+c}{a-b}=\frac{a+b+c-a-b+c}{a-b}.$$

Учащимся, допускающим такие ошибки, можно предложить индивидуальные задания на числовом материале. В заданиях, что приведены ниже, фактически предлагаются контрпримеры. Учащиеся поставлены перед необходимостью обсуждать эти контрпримеры и объяснять причину ошибки.

Найдите ошибку в «сложении» трех дробей: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$ $=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Заметьте, что сумма трех положительных чисел оказалась равна второму слагаемому. Выполните сложение правильно и придумайте аналогичное упражнение с алгебраическими дробями.

Объясните, верны ли результаты двух «вычитаний»:

$$а)\ \frac{3}{a}-\frac{3}{b}=\frac{3-3}{ab}=0;\ б)\ \frac{7}{9}-\frac{7}{10}=\frac{7-7}{90}=0.$$

Может ли выражение $\frac{3}{a}-\frac{3}{b}$ принимать нулевое значение, если $a\neq b$? Не выполняя вычитания в случае б), укажите, каким числом должна быть разность: положительным или отрицательным? Выполните верно оба вычитания.

В «сложении» $2+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}$ сумма целого числа и дроби оказалась меньше первого слагаемого. Может ли это случиться с положительными слагаемыми? Выполните сложение верно. Укажите аналогичное задание с буквами вместо чисел.

**КОНСУЛЬТАЦИЯ**

# В помощь учителям, работающим по учебнику Э. Р. Нурка и А. Э. Тельгмаа «Математика 6»*

## Примерные контрольные работы (II полугодие)

Контрольные работы приведены в двух вариантах. Разночтения во II варианте указаны в квадратных скобках. Задания, отмеченные знаком °, соответствуют уровню обязательной подготовки.

**№ 6** (§ 4.13—4.17)

1°. Найди неизвестный член пропорции: $16:20=0{,}4:x$ $\left[\frac{x}{6}=\frac{3}{4}\right]$.

2°. За 4 мин станок изготавливает 18 деталей. Сколько деталей он может изготовить за 10 мин? [Машинистка напечатала 16 страниц за 3 ч. Сколько страниц она напечатает за 9 ч?]

3°. С помощью 3 подъемных кранов баржу можно разгрузить за 10 ч. За какое время эту баржу могут разгрузить 5 подъемных кранов? [Две одинаковые трубы наполняют бассейн за 6 ч. За какое время наполнят бассейн 3 такие же трубы?]

4°. Какую длину имеет отрезок, которым изображена на плане взлетная полоса длиной 400 м, если масштаб плана 1:10 000? [Стол учителя имеет длину 2 м. Какую длину будет иметь прямоу-

---

* Материал подготовлен в лаборатории обучения математике НИИ СиМО АПН СССР.

гольник, изображающий стол на плане, если масштаб равен 1:100?]

5. В состав лечебного сбора трав входят мята, валериана и хмель в отношении 5:3:2. Какое количество каждой из трав входит в 200 г такого сбора? [В секции игрушек количество мячей красного, синего и зеленого цветов находится в отношени 6:5:4. Сколько мячей каждого цвета, если всего в секции 300 мячей?]

## № 7 (§ 5.1—5.10)

1°. Запиши число, противоположное данному [запиши, чему равен модуль данного числа]: $-3$, $8$, $-1{,}4$, $\frac{1}{7}$, $0$.

2°. Найди значение выражения $|a|$ $[-a]$, если $a=-7$, $\frac{1}{3}$, $0$, $1$

3°. Какое из двух чисел больше: а) $-0{,}27$ и $-0{,}17$ $[-1{,}13$ и $-1{,}03]$; б) $-3$ и $1$ $[2$ и $-5]$?

4°. На координатной плоскости построй точки: $A(-4, 1)$, $B(0, 3)$, $C(1, -1)$, $D(2, 0)$ $[A(1, 0)$, $B(2, -1)$, $C(0, 2)$, $D(-3, 3)]$.

5. Выдели из следующих рациональных чисел дробные отрицательные числа и запиши их в порядке возрастания: $-9$, $2{,}4$, $-0{,}5$, $\frac{3}{4}$, $-1$, $-\frac{1}{3}$, $4$, $-1\frac{1}{2}$, $0$, $-1{,}3$ $[-10$, $3{,}1$, $-0{,}4$, $\frac{2}{3}$, $-1$, $\frac{3}{4}$, $5$, $-2\frac{1}{2}$, $-2{,}3$, $0]$.

6. На координатной плоскости проведи прямую через начало координат и точку $A(-4, 2)$ $[A(2, -4)]$. Отметь на прямой точку $B$ с ординатой $-1$ [абсциссой $-1$]. Запиши координаты точки $B$.

## № 8 (§ 6.1—6.5)

1°. Вычисли: а) $-8+(-14)$, $-6+(-6)$, $27+(-9)$, $-7+7$, $0+(-5)$; б) $5-7$, $11-(-3)$, $-12-8$, $4-(-19)$, $0-3$ [а) $-15+(-6)$, $-10+(-10)$, $34+(-7)$, $-2+2$, $0+(-4)$; б) $8-9$, $21-(-5)$, $-6-14$, $7-(-26)$, $0-3$].

2°. Найди значение суммы: а) $-3+8+4+(-9)+(-1)+3$ $[9+5-6+(-4)+(-8)+6]$; б) $-6+3-4+8-10$ $[-8+5-2+6-15]$.

3°. Найди значение выражения $a-b$, если $a=25$, $b=-7$ [$4-a$, если $a=-19$].

4. К сумме чисел $2{,}5$ и $-1\frac{1}{4}$ $\left[4\frac{1}{2}\text{ и } -2{,}25\right]$ прибавь число, обратное числу $1\frac{1}{4}$ $[2{,}25]$.

5. Упрости выражение и вычисли его значение: $m+1{,}3+(-4)-m-0{,}5+m$, если $m=-3$; $0$; $5$ $[a+2{,}1+(-5)-a-1{,}6+a$, если $a=-4$; $0$; $7]$.

**№ 9** (§ 6.6—6.15)

1° Приведи подобные слагаемые:

$13a+4-7a-25a$ $[24a-9a+7-14a]$.

2°. Упрости выражение: а) $3(x-5)+10x$ $[20x+2(x-8)]$; б) $7b-(3b-1)$ $[5a-(2a-4)]$.

3°. Реши уравнение: а) $-2x+15=0$ $[-4x+22=0]$; б) $x+3=4x+9$ $[2x+1=5x+10]$.

4. Вычисли: $\dfrac{0{,}9-0{,}89}{1-0{,}25-\frac{2}{3}}-\dfrac{0{,}01}{0{,}1}$ $\left[\dfrac{0{,}7-0{,}69}{1-0{,}75-\frac{1}{6}}-\dfrac{0{,}001}{0{,}01}\right]$.

5. Для занятий в кружке купили кисти, краски и бумагу, заплатив за все 52 р. [59 р.]. Найди отдельно стоимость кистей, краски и бумаги, если известно, что краски дороже кистей в 3 раза и дороже бумаги на 11 р. [на 16 р.].

# В помощь учителям, работающим по новым учебникам алгебры для VII и VIII классов (под ред. С. А. Теляковского)[1]

## Примерные контрольные работы (II полугодие)

Поурочное планирование по алгебре для VII и VIII классов на весь учебный год и примерные контрольные работы на I полугодие опубликованы в № 3 за 1989 г. В этом номере тексты контрольных работ даны в двух вариантах. Разночтения для второго варианта указаны в квадратных скобках. Знаком ° отмечены задания, соответствующие обязательным результатам обучения.

### VII КЛАСС

**№ 6** (§ 9, 10)

1°. Выполните действия:

а) $(3a-4ax+2)-(11a-14ax)$ $[(2a^2-3a+1)-(7a^2-5a)]$;

б) $3y^2(y^3+1)$ $[3x(4x^4-x)]$.

2°. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $10ab-15b^2$ $[2xy-3xy^2]$; б) $18a^3+6a^2$ $[8b^4+2b^3]$.

3°. Решите уравнение:

$9x-6(x-1)=5(x+2)$ $[7-4(3x-1)=5(1-2x)]$.

4°. За 4 ч пассажирский поезд прошел то же расстояние, что товарный — за 6 ч. Найдите скорость пассажирского поезда, если известно, что скорость товарного на 20 км/ч меньше. [В трех шестых

[1] Материал подготовлен в лаборатории обучения математике НИИ СиМО АПН СССР.

классах 91 ученик. В шестом «А» на 2 ученика меньше, чем в шестом «Б», а в шестом «В» на 3 ученика больше, чем в шестом «Б». Сколько учащихся в каждом классе?]

5. Решите уравнение: $\frac{3x}{6}-\frac{x}{3}=\frac{5-x}{9}$ $\left[\frac{x-1}{5}=\frac{5-x}{2}+\frac{3x}{4}\right]$.

6. Упростите выражение: $2a(a+b-c)-2b(a-b-c)+2c(a-b+c)$ $[3x(x+y+c)-3y(x-y-c)-3c(x+y-c)]$.

## № 7 (§ 11)

1°. Выполните умножение:

а) $(c+2)(c-3)$ $[(a-5)(a-3)]$;
б) $(2a-1)(3a+4)$ $[(5x+4)(2x-1)]$;
в) $(5x-2y)(4x-y)$ $[(3p-c)(2p+4c)]$;

2°. Разложите на множители:

а) $a(a+3)-2(a+3)$ $[x(x-y)+a(x-y)]$;
б) $ax-ay+5x-5y$ $[2a-2b+ca-cb]$.

3. Упростите выражение:

$-0{,}1x(2x^2+6)(5-4x^2)$ $[0{,}5(4x^2-1)(5x^2+2)]$.

4. Представьте многочлен в виде произведения:

а) $x^2-xy-4x+4y$ $[2a-ac-2c+c^2]$;
б) $ab-ac-bx+cx+c-b$ $[bx+by-x-y-ax-ay]$.

5. Из прямоугольного листа фанеры вырезали квадратную пластинку, для чего с одной стороны листа отрезали полосу шириной 2 см, а с другой — 3 см. Найдите сторону получившегося квадрата, если известно, что его площадь на 51 см$^2$ меньше площади прямоугольника [Бассейн имеет прямоугольную форму. Одна из его сторон на 6 м больше другой. Вокруг него проходит дорожка, ширина которой 0,5 м. Найдите стороны бассейна, если площадь окружающей его дорожки 15 м$^2$.]

## № 8 (§ 12, 13)

1°. Преобразуйте в многочлен:

а) $(y-2)^2$ $[(3a+4)^2]$;
б) $(7x+a)^2$ $[(2x-b)^2]$;
в) $(5c-1)(5c+1)$ $[(b+3)(b-3)]$;
г) $(3a+2b)(3a-2b)$ $[(5y-2x)(5y+2x)]$.

2°. Упростите выражение $(a-9)^2-(81+2a)$ $[(c+b)(c-b)+5c^2]$.

3°. Разложите на множители:

а) $x^2-49$ $[25y^2-a^2]$; б) $25x^2-10xy+y^2$ $[c^2+4bc+4b^2]$.

4. Решите уравнение: $(2-x)^2-x(x+1{,}5)=4$ $[12-(4-x)^2=x(3-x)]$.

5. Выполните действия:

а) $(y^2-2a)(2a+y^2)$ $[(3x+y^2)(3x-y^2)]$;

б) $(3x^3+x)^2$ $[(a^3-6a)^2]$;

в) $(2+c)^2(2-c)^2$ $[(a-x)^2(x+a)^2]$.

6. Разложите на множители:

а) $4x^2y^2-9a^4$ $\left[100a^4-\frac{1}{9}b^2\right]$;

б) $25a^2-(a+3)^2$ $[9x^2-(x-1)^2]$;

в) $27a^3+b^3$ $[x^3+y^6]$.

## № 9 (§ 14)

1°. Упростите выражение:

а) $(x-3)(x-7)-2x(3x-5)$ $[2x(x-3)-3x(x+5)]$;

б) $4a(a-2)-(a-4)^2$ $[(a+3)(a-1)+(a-3)^2]$;

в) $2(b+1)^2-4b$ $[3(y+5)^2-3y^2]$.

2°. Разложите на множители:

а) $x^3-9x$ $[c^3-16c]$; б) $-5a^2-10ab-5b^2$ $[3a^2-6ab+3b^2]$.

3. Упростите выражение: $(y^2-2y)^2-y^2(3+y)(y-3)+2y(2y^2+5)$ $[(3a-a^2)^2-a^2(a-2)(2+a)+2a(7+3a^2)]$.

4. Разложите на множители:

а) $16x^4-81$ $[81a^4-1]$; б) $x^2-x-y^2-y$ $[y^2-x^2-6x-6y]$.

5. Докажите, что выражение $x^2-4x+9$ $[-a^2+4a-9]$ может принимать лишь положительные [отрицательные] значения.

## № 10 (§ 15, 16)

1°. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x+y=3, \\ 6x-2y=1 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} 3x-y=7, \\ 2x+3y=1 \end{cases}\right].$$

2°. Для детского сада купили 8 кг конфет по цене 2 р. за килограмм и 3 р. за килограмм. За всю покупку заплатили 19 р. Сколько килограммов конфет каждого сорта купили? [Велосипедист ехал 2 ч по лесной дороге и 1 ч по шоссе, всего он проехал 40 км. Скорость его на шоссе была на 4 км/ч больше, чем скорость на лесной дороге. С какой скоростью велосипедист ехал по шоссе и с какой — по лесной дороге?]

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(3x+2y)+9=4x+21, \\ 2x+10=3-(6x+5y) \end{cases} \quad \left[\begin{cases} 2(3x-y)-5=2x-3y, \\ 5-(x-2y)=4y+16 \end{cases}\right].$$

4. Прямая $y=kx+b$ проходит через точки $A(3, 8)$ и $B(-4, 1)$ $[A(5, 0)$ и $B(-2, 21)]$ Напишите уравнение этой прямой.

5. Выясните, имеет ли решение данная система. Если имеет, то сколько решений:

$$\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 6x+4y=1 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} 5x-y=11, \\ -11x+2y=-22 \end{cases}\right]?$$

## VIII класс

### № 6 (§ 10)

1°. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x^2}{x^2-9}=\dfrac{12-x}{x^2-9}$ $\left[\dfrac{3x+4}{x^2-16}=\dfrac{x^2}{x^2-16}\right]$;

б) $\dfrac{6}{x-2}+\dfrac{5}{x}=3$ $\left[\dfrac{3}{x-5}+\dfrac{8}{x}=2\right]$.

2. Из пункта $A$ в пункт $B$ велосипедист проехал по одной дороге длиной 27 км, а обратно возвращался по другой дороге, которая была короче первой на 7 км. Хотя на обратном пути велосипедист уменьшил скорость на 3 км/ч, он все же на обратный путь затратил времени на 10 мин меньше, чем на путь из $A$ в $B$. С какой скоростью ехал велосипедист из $A$ в $B$? [Катер прошел 12 км против течения реки и 5 км по течению. При этом он затратил столько времени, сколько ему потребовалось бы на путь в 18 км по озеру. Какова собственная скорость катера, если известно, что скорость течения реки 3 км/ч?]

### № 7 (§ 11)

1°. Докажите неравенство:

а) $(x-2)^2>x(x-4)$ $[(x+7)^2>x(x+14)]$;
б) $a^2+1\geqslant 2(3a-4)$ $[b^2+5\geqslant 10(b-2)]$.

2°. Известно, что $a<b$ $[a>b]$. Сравните:

а) $21a$ и $21b$ $[18a$ и $18b]$;
б) $-3{,}2a$ и $-3{,}2b$ $[-6{,}7a$ и $-6{,}7b]$;
в) $1{,}5b$ и $1{,}5a$ $[-3{,}7\,b$ и $-3{,}7a]$.

Результат сравнения запишите в виде неравенства.

3. Известно, что $2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$ $[3{,}1<\sqrt{10}<3{,}2]$. Оцените: а) $2\sqrt{7}$ $[3\sqrt{10}]$; б) $-\sqrt{7}$ $[-\sqrt{10}]$.

4. Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами $a$ см и $b$ см, если известно, что $2{,}6<a<2{,}7$ $[1{,}5<a<1{,}6]$, $1{,}2<b<1{,}3$ $[3{,}2<b<3{,}3]$.

5. К каждому из чисел 2, 3, 4 и 5 прибавили одно и то же число $a$. Сравните произведение крайних членов получившейся последовательности с произведением средних членов. [Даны четыре последовательных натуральных числа. Сравните произведение первого и последнего из них с произведением двух средних чисел.]

## № 8 (§ 12)

1°. Решите неравенство:

а) $\frac{1}{6}x<5$ $\left[\frac{1}{3}x\geqslant 2\right]$; б) $1-3x\leqslant 0$ $[2-7x>0]$;

в) $5(y-1{,}2)-4{,}6>3y+1$ $[6(y-1{,}5)-3{,}4>4y-2{,}4]$.

2. При каких $a$ $[b]$ значение дроби $\frac{7+a}{3}$ $\left[\frac{b+4}{2}\right]$ меньше [больше] соответствующего значения дроби $\frac{12-a}{2}$ $\left[\frac{5-2b}{3}\right]$?

3° Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}2x-3>0,\\7x+4>0\end{cases}$ $\left[\begin{cases}4x-10>0,\\3x-5>1\end{cases}\right]$;

б) $\begin{cases}3-2x<1,\\1{,}6+x<2{,}9\end{cases}$ $\left[\begin{cases}1{,}4+x>1{,}5,\\5-2x>2\end{cases}\right]$

4. Найдите целые решения системы неравенств:

$$\begin{cases}6-2x<3(x-1),\\6-\frac{x}{2}\geqslant x\end{cases} \quad \left[\begin{cases}10-4x\geqslant 3(1-x),\\3{,}5+\frac{x}{4}<2x\end{cases}\right].$$

5. При каких значениях $x$ $[a]$ имеет смысл выражение

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{6-x} \quad [\sqrt{5a-1}+\sqrt{a+8}]?$$

## № 9 (§ 11, 12)

1°. Найдите значения выражений:

а) $4^{11}\cdot 4^{-9}$ $[5^{-4}\cdot 5^{2}]$; б) $6^{-5}:6^{-3}$ $[12^{-3}:12^{-4}]$;

в) $(2^{-2})^3$ $[(3^{-1})^{-3}]$.

2° Упростите выражение:

а) $(x^{-3})^4x^{14}$ $[(a^{-5})^4a^{22}]$;

б) $1{,}5a^2b^{-3}\cdot 4a^{-3}b^4$ $[0{,}4x^6y^{-8}\cdot 50x^{-5}y^9]$.

3. Преобразуйте выражение:

а) $\left(\frac{1}{3}x^{-1}y^2\right)^{-2}$ $\left[\left(\frac{1}{6}x^{-4}y^3\right)^{-1}\right]$;

б) $\left(\frac{3x^{-1}}{4y^{-3}}\right)^{-1}\cdot 6xy^2$ $\left[\left(\frac{3a^{-4}}{2b^{-3}}\right)^{-2}\cdot 10a^7b^3\right]$.

4. Вычислите $\frac{3^{-9}\cdot 9^{-4}}{27^{-6}}$ $\left[\frac{2^{-6}\cdot 4^{-3}}{8^{-7}}\right]$.

5. Найдите приближенные значения суммы и разности чисел $x$ и $y$ $[a$ и $b]$, если $x\approx 5{,}8608$, $y\approx 1{,}12$ $[a\approx 4{,}1;\ b\approx 2{,}3608]$.

6. Найдите приближенные значения произведения и частного чисел $a$ и $b$ $[x$ и $y]$, если $a\approx 6{,}124\cdot 10^6$, $b\approx 2{,}5\cdot 10^{-3}$ $[x\approx 8{,}136\cdot 10^3$, $y\approx 1{,}25\cdot 10^{-2}]$.

## № 10

1°. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}3(x-1)-2(1+x)<1,\\3x-4>0\end{cases} \quad \left[\begin{cases}5(2x-1)-3(3x+6)<2,\\2x-17>0\end{cases}\right].$$

2°. Упростите выражение:

$$(\sqrt{6}+\sqrt{3})\sqrt{12}-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\ [(\sqrt{10}-\sqrt{5})\sqrt{20}-5\sqrt{8}].$$

3. Упростите выражение:

$$\frac{6}{y^2-9}+\frac{1}{3-y}\cdot\frac{y^2+6y+9}{5}\quad\left[\left(\frac{2}{x^2-4}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2x-x^2}\right):\frac{1}{x^2+4x+4}\right].$$

4. Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой, находящийся на расстоянии 560 км. Скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго, и поэтому первый автомобиль приезжает на место на 1 ч раньше второго. Определите скорость каждого автомобиля. [Пассажирский поезд был задержан в пути на 16 мин и нагнал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью на 10 км/ч большей, чем полагалось по расписанию. Какова была скорость поезда по расписанию?]

5. При каких значениях $x$ функция $y=-\frac{x+8}{4}+1$ $\left[y=\frac{6-x}{5}-\right.$ $\left.-2\right]$ принимает положительные [отрицательные] значения?

## Таблицы по математике для V—VI классов

**М. Б. Волович (Москва)**

Серия таблиц, о которой идет речь в этой статье, готовится к выпуску издательством «Просвещение» в 1989 г. Цель статьи — помочь эффективнее использовать эти таблицы и, кроме того, если они по тем или иным причинам не попадут в вашу школу,— изготовить самодельные таблицы.

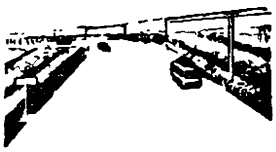
Серия содержит 23 таблицы, охватывающие основной материал программы по математике V—VI классов. Их можно использовать при работе по любому действующему учебнику. Авторы серии — Г. Г. Левитас и автор этой статьи.

Предлагаемые таблицы не предназначены для введения нового материала. Каждая из них содержит материал более обширный, чем тот, который требуется в конкретный момент объяснения нового. Все необходимые изображения показаны на таблицах не в динамике, а в уже завершенном виде. Поэтому обычный способ их использования — организация с их помощью повторения и закрепления ранее изученного материала. К таблицам следует также прибегать в случае возникновения ошибок или затруднений у учащихся.

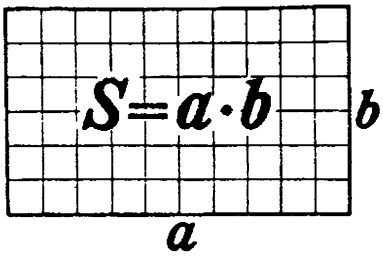
Табл. 1. «Формулы» (рис. 1). При использовании этой таблицы важно показать учащимся, что вычисления по формулам всегда сводятся к следующим операциям: 1) вместо всех букв, кроме одной, подставляются соответствующие числа; 2) находится число, соответствующее последней из составляющих формулу букв.

## ФОРМУЛЫ

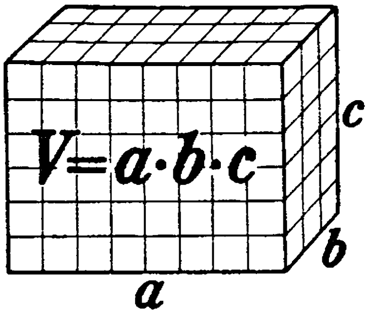
①



$s = v \cdot t$



$S = a \cdot b$



$V = a \cdot b \cdot c$

## виды задач

| | $v$ | $t$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 60 км/ч | 3 ч | ? |
| 2 | ? | 4 ч | 200 км |
| 3 | 90 км/ч | ? | 180 км |

| | $a$ | $b$ | $S$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 м | 3 м | ? |
| 2 | 2 см | ? | 18 см$^2$ |
| 3 | ? | 5 см | 20 см$^2$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ | $V$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 см | 3 см | 4 см | ? |
| 2 | 7 дм | 5 дм | ? | 70 дм$^3$ |
| 3 | 3 мм | ? | 10 мм | 60 мм$^3$ |
| 4 | ? | 4 м | 5 м | 80 м$^3$ |

Табл. 2. «Основные свойства сложения и умножения» содержит 9 свойств сложения и умножения, составляющих аксиоматику поля: 1) $a+b=b+a$; 2) $ab=ba$; 3) $a+(b+c)=(a+b)+c$; 4) $a(bc)=(ab)c$; 5) $a(b+c)=ab+ac$; 6) $a+0=a$; 7) $a\cdot 1=a$; 8) $a+(-a)=0$; 9) $a\cdot\frac{1}{a}=1$ (если $a\neq 0$).

В каждой формуле цветом выделено то, на что надо обратить особое внимание учащихся: знаки равенства в формулах 1—5; числа 0 и 1 в формулах 5—7; $-a$ и $\frac{1}{a}$ в формулах 8 и 9. Заметим, что в таблице отсутствуют те свойства сложения и умножения, которые могут быть получены из девяти перечисленных как теоремы, например свойство нуля при умножении: $a\cdot 0=0$. На кружке или в ходе индивидуальной работы с интересующимися математикой учащимися могут быть даны доказательства этих теорем.

При работе со всеми учащимися важно подчеркнуть, что перечисленные в таблице девять свойств являются основными, наиболее важными. Такая трактовка не расходится с истинным значением слова «основные», хотя и требует уточнений при знакомстве с понятием аксиоматического метода в старших классах.

В V классе два последних свойства еще не изучаются. Советуем учителю либо закрыть часть таблицы с этими свойствами полоской бумаги, либо сказать ученикам, что эти свойства будут изучены в следующем классе.

Самым трудным свойством для учащихся является распределительный закон (свойство 5), в частности при первоначальном знакомстве с приведением подобных слагаемых. Для того чтобы учащиеся яснее видели в этом свойстве теоретическую основу указанного действия, советуем показать, как «работает» свойство 5, если дано выражение вида $ab+ac$, а затем некоторое время требовать от учащихся подробных записей и соответствующих ссылок.

В табл. 3 «Свойства единицы. Свойства нуля» с помощью стрелок записаны следующие свойства единицы и нуля: из $a \cdot 1 = a$ получаем: $a:1=a$; $a:a=1$ при $a \neq 0$; из $a+0=a$: $a-0=a$; $a-a=0$; из $a \cdot 0 = 0$ : $0:a=0$ при $a \neq 0$. Далее указано: «Делить на нуль нельзя!»

Полезно время от времени требовать от учащихся обоснование следствий. Например, следствие $a-0=a$ справедливо потому, что вычитание проверяется сложением.

Желательно фиксировать в сознании учащихся оговорку «$a \neq 0$», которая необходима при делении на переменные.

Табл. 4 «Квадрат и куб числа». В верхней части таблицы даны определения квадрата и куба числа: $x^2 = x \cdot x$; $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Ниже — квадраты и кубы чисел от 0 до 10 и пример, пользуясь которым учителю легко напомнить учащимся порядок действий:

$$\overset{(3)}{} \; \overset{(1)}{} \; \overset{(4)}{} \; \overset{(2)}{} \; \overset{(5)}{}$$
$$(3 \cdot 7^2 - 2^3)^2 = 19\,321$$

(1) $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$,
(2) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$,
(3) $3 \cdot 49 = 147$,
(4) $147 - 8 = 139$,
(5) $139^2 = 139 \cdot 139 = 19\,321$.

Табл. 5 «Признаки делимости». Здесь имеются два столбца: «Делимость на 2, на 5, на 10 проверяйте по последней цифре» и «Делимость на 3, на 9 проверяйте по сумме цифр».

Вертикальные линии делят первый столбец на три части, второй — на две части («на 2», «на 5» и т. д.). Горизонтальные линии делят все столбцы на две части: «делится» и «не делится». В графе «делится на 2» даны числа 70, 72, 74, 76, 78, последние цифры которых выделены цветом. Это позволяет подчеркнуть, что «делится на 2» означает то же самое, что «последняя цифра числа — четная». Аналогично в графе «делится на 5» записаны числа 72 310 и 385, в графе «делится на 10» — число 13 890, последние цифры которых выделены цветом.

В графе «делится на 3» записано число 714, ниже которого подсчитана сумма цифр: $7+1+4=12$. В последней графе записаны число 657 и сумма цифр $6+5+7=18$.

В соответствующих графах фрагмента «не делится» даны числа, оканчивающиеся на нечетную цифру; на цифру, отличную от нуля и пятерки (последние цифры подчеркнуты); 811, $8+1+1=10$; 236, $2+3+6=11$.

В нижней части таблицы приведен образец рассуждений: «72 310 делится на 5, так как 0 делится на 5»; «236 не делится на 9, так как $2+3+6=11$ не делится на 9».

Полезно обратить внимание учащихся на то, что можно говорить не о пяти признаках делимости (на 2, на 5, на 10, на 3, на 9), а о двух признаках: о делимости на 2, на 5 и на 10 и делимости на 3 и на 9.

Табл. 6 «Дроби» (рис. 2). Используя фрагмент 1, полезно составлять задачи на отыскание на луче точки, которая соответствовала бы названной дроби, а также на отыскание числа, обозначенного указанным штрихом. Поскольку единица разделена на десятые доли, то можно предлагать вопросы и получать справки о положении на луче дробей со знаменателями 10, 5 и 2.

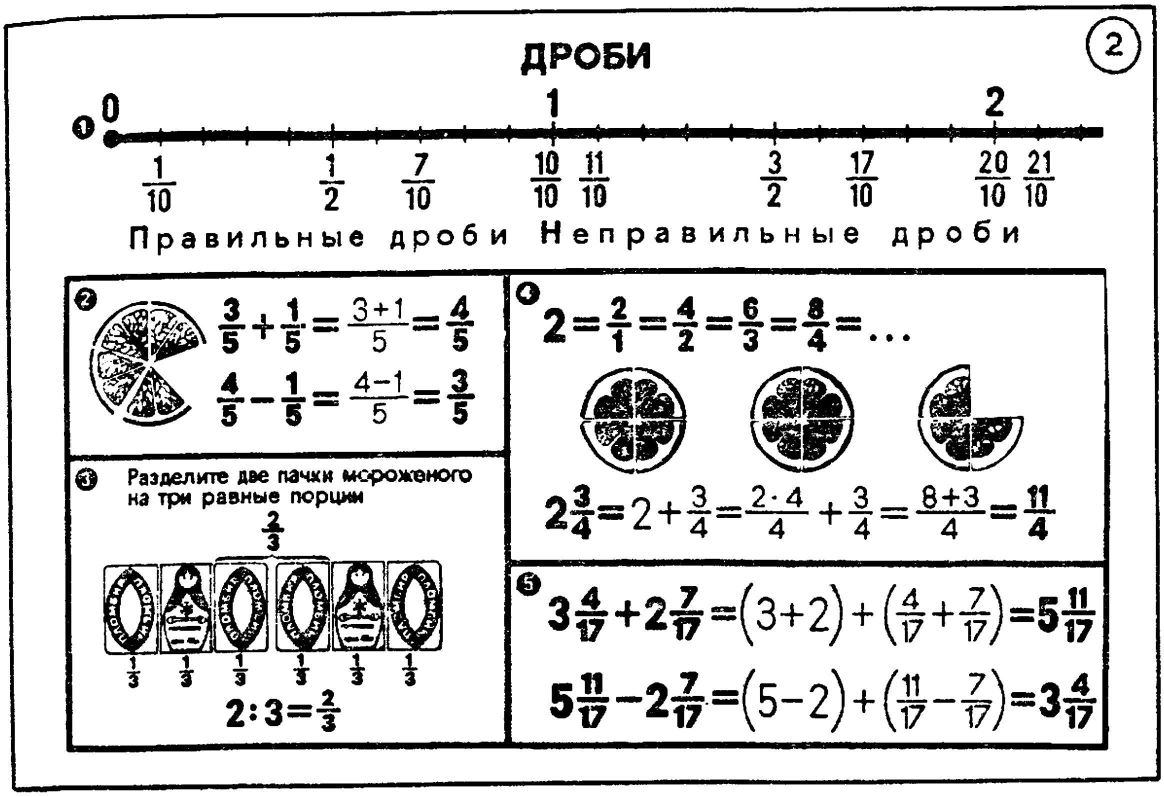
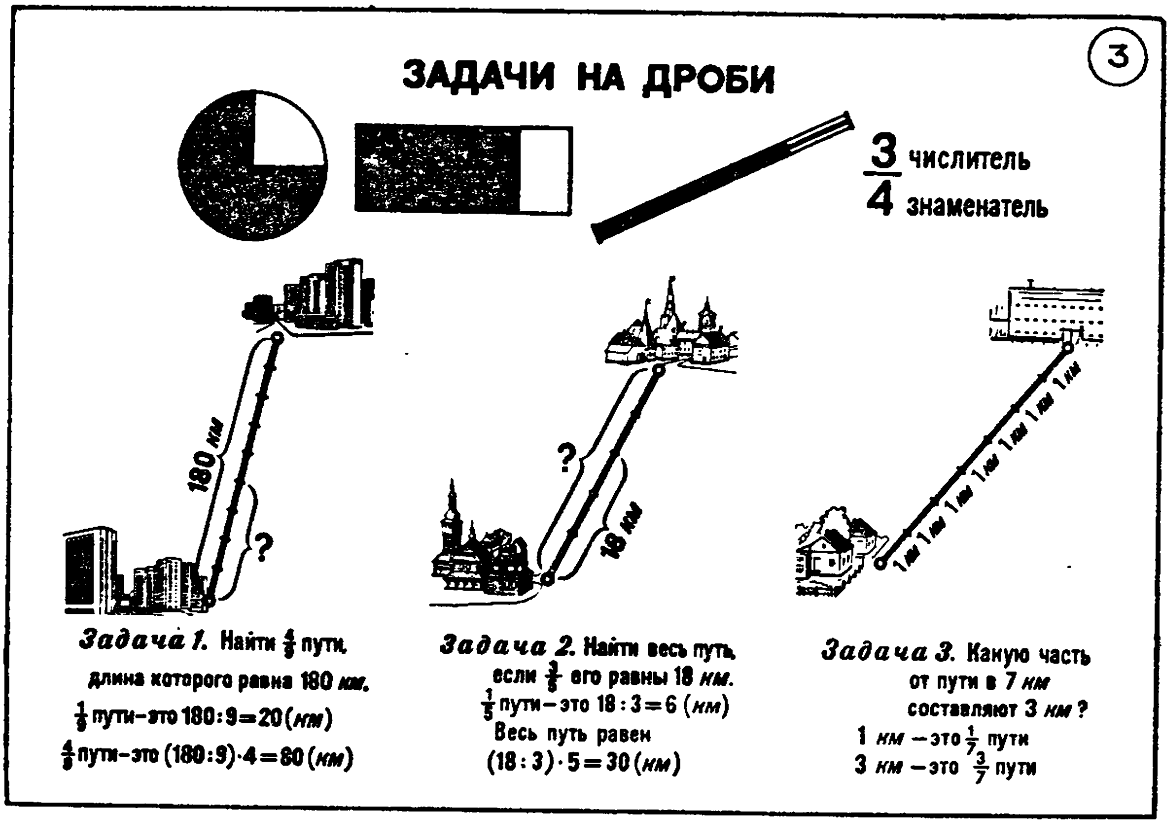



Табл. 7 «Задачи на дроби» (рис. 3). Пользуясь верхней частью таблицы, важно напомнить учащимся, что знаменатель дроби (число 4) показывает, на сколько равных частей разделен рассматриваемый объект (круг, прямоугольник, отрезок). Числитель дроби (число 3) указывает, сколько взято таких частей.

К толкованию смысла числителя и знаменателя дроби следует постоянно прибегать и при рассмотрении содержащихся в таблице типовых задач (как при первоначальном знакомстве учащихся с ними, так и при последующем обращении к ним в случае ошибок или затруднений).

Табл. 8 «Разряды десятичных дробей» представляет собой заготовку для изготовления наглядного пособия, помогающего освоить чтение и запись десятичных дробей. Верхняя ее часть — таблица разрядов от сотен до десятимиллионных. Даны надписи: целая часть, дробная часть; указаны названия всех разрядов: сотни, десятки, единицы, десятые, сотые и т. д. Все разряды заполнены нулями. Первые три нуля отделены от остальных запятой. Имеется планка, которая при перегибании образует кармашек. Его назначение — удер-




живать цифры, перекрывающие нули в любом из представленных на таблице разрядов.

В нижней части таблицы (она предназначена для разрезания) напечатаны цифры от 1 до 9 (каждая по 2 раза). Размер цифр такой же, как и размер нулей.

Поставив, например, в разряд десятых цифру 5, а в разряд тысячных цифру 8, нужно обратить внимание учащихся на то, что незакрытые нули означают отсутствие в разряде единиц. При записи чисел нули, стоящие левее разряда единиц, и нули, стоящие правее разряда тысячных, писать не надо. Получаем запись: 0,508.

Т а б л. 9 «Действия с десятичными дробями» имеет вид:

**Действия с десятичными дробями**

1
$$\begin{array}{r} +\,38{,}5 \\ 0{,}74 \\ \hline 39{,}24 \end{array}$$

2
$$\begin{array}{r} -\,29{,}6 \\ 0{,}85 \\ \hline 28{,}75 \end{array}$$

3
$$\begin{array}{rl} 18{,}4 & \text{1 знак} \\ 0{,}15 & \text{2 знака} \\ \hline 920 & \\ +\,184 & \\ \hline 2{,}760 & (1+2)\ \text{знака} \end{array}$$

4
$$\begin{array}{r|l} -\,59{,}28 & 16 \\ \cline{2-2} 48 & 3{,}705 \\ \hline -\,112 & \\ 112 & \\ \hline -\,8 & \\ 0 & \\ \hline -\,80 & \\ 80 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Кроме того, имеется фрагмент 5, показывающий, как 8,75 умножается на 10 и на 1000 и как 63,4 делится на 10 и на 1000 (в ответе фиксируется место запятой до умножения и перемещение запятой вправо или влево на столько цифр, сколько нулей в множителе).

Наконец, имеется фрагмент 6, знакомящий с делением 5,92 на 1,6 и 59,2 на 0,16.

С помощью фрагментов 1 и 2 удобно напомнить учащимся, что сложение и вычитание осуществляется по разрядам.

Табл. 10 «Проценты» содержит: определение «1 % числа А — это 1/100 числа А»; три квадрата 10×10, разбитые на 100 равных квадратов каждый; три типовые задачи на проценты.

Решение задачи 1 — найти 17 % от 48 — показано на квадрате, под которым приведено условие и само решение этой задачи. Все 100 клеток — это 48 (число написано под первым квадратом). 1 % — это 48:100. Поэтому в правом нижнем углу заштрихована одна клетка и под ней имеется подпись «0,48». 17 % — это (48:100)·17=8,16. Поэтому в верхней части первого квадрата заштриховано 17 клеток и на них дана надпись «8,16».

Решение рассматриваемой задачи оформлено в таблице так:
1 % — это 48:100=0,48,
17 % — это (48:100)·17=8,16.

Аналогично проиллюстрировано решение задачи: найти число, 31 % которого равен 62. 1 % — это 62:31=2, и потому рядом с заштрихованной в правом нижнем углу клеткой дано число 2. 31 % — это 31 заштрихованная клетка с надписью поверх выделенной части «62». 100 % — это (62:31)·100=200. Соответствующая запись дана под вторым квадратом.

Задача 3 — сколько процентов от 75 м составляют 54 м? — решена так. Все 100 клеток — это по условию 75 (подпись под квадратом). 1 % — это 75:100=0,75 (подпись под заштрихованной клеткой в нижнем правом углу). Таких процентов в 54 м содержится 54:(75:100)= =72 (заштриховано 72 квадрата; поверх выделенной части надпись «54»).

Табл. 11 «Углы и их измерение» (рис. 4). Как известно, измерение углов транспортиром дается учащимся нелегко. Поэтому важно расчленить его на отдельные операции:

1) приложить транспортир к измеряемому углу так, чтобы: а) вершина угла совпала с центром транспортира; б) одна из сторон угла пошла по линейке транспортира; в) вторая сторона угла пересекала круглую шкалу транспортира;

2) подсчитать на круглой шкале число градусов, оказавшихся между сторонами угла.

Этот алгоритм необходимо сообщить при первоначальном знакомстве с измерением углов и организовать решение нескольких задач на измерение углов так, чтобы каждый шаг ученика проверялся.

Впоследствии достаточно обращать внимание учащихся в случае ошибок или затруднений на соответствующий рисунок в таблице. При этом предлагается сравнивать, правильно ли наложен транспортир на угол, правильно ли подсчитано число градусов.

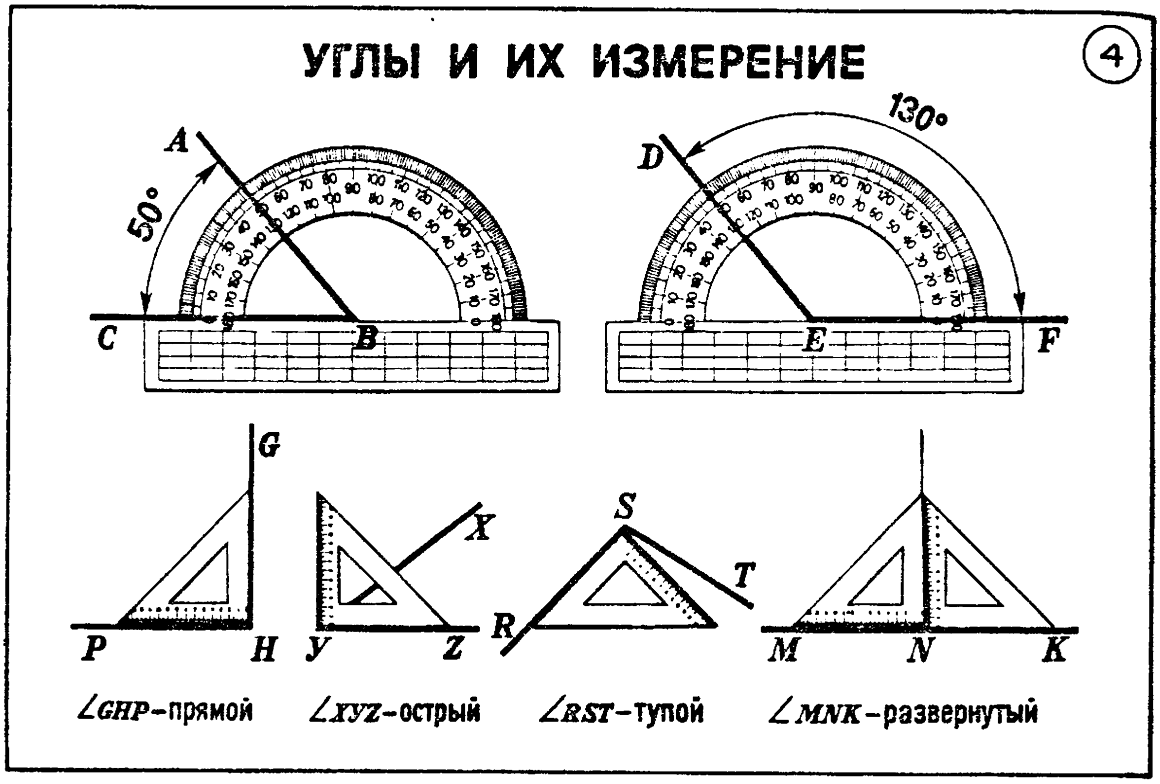



Табл. 12 «Длина окружности и площадь круга» (рис. 5). Полезно предложить учащимся самостоятельно подсчитать длину окружности, радиус которой 6 см, и убедиться, что получается число чуть меньшее, чем 19. Полезно также приближенно подсчитать площадь круга (число единичных квадратов внутри круга), а затем сравнить ее с полученной по формуле.

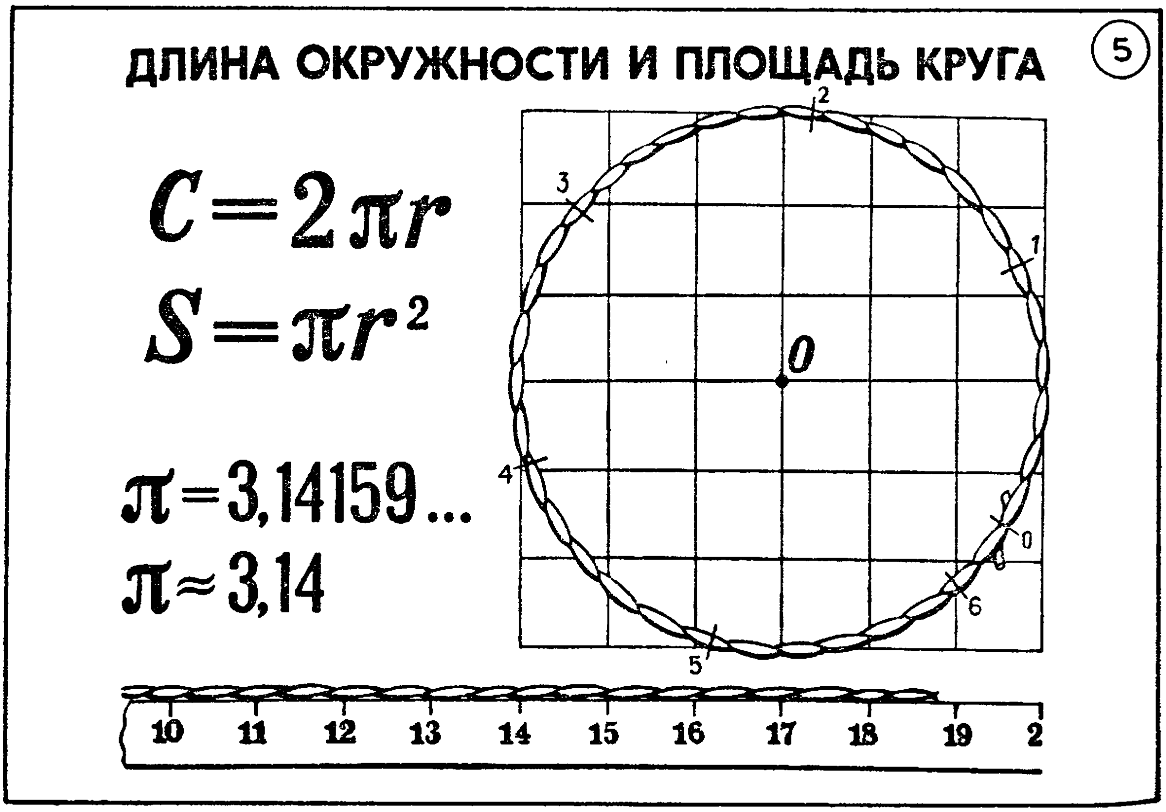


Табл. 13 «Единицы измерения длин, площадей и объемов» должна помочь исключить зубрежку при переходе от одних единиц к другим. Не надо заучивать, что 1 км$^3$=1 000 000 000 м$^3$. Достаточно понимать, что требуется найти объем куба (в кубических метрах), если длина одного ребра 1 км. Для этого выразим длину ребра в метрах: 1 км=1000 м. И воспользуемся тем, что объем куба со стороной $a$ вычисляется по формуле: $V=a^3$.

1 км$^3$=1 км·1 км·1 км=1000 м·1000 м·1000 м=1 000 000 000 м$^3$.

В левой части табл. 13 даны изображения 1 дм (разбитого на сантиметры), 1 дм$^2$, 1 дм$^3$. В правой — единицы длины: 1 см=10 мм, 1 м=10 дм, 1 дм=10 см, 1 км=1000 м; единицы площади: 1 дм$^2$=1 дм·1 дм=10 см·10 см=100 см$^2$, 1 см$^2$=100 мм$^2$, 1 м$^2$=100 дм$^2$, 1 км$^2$=1 000 000 м$^2$, 1 га=10 000 м$^2$ и единицы объема: 1 дм$^3$=1 дм·1 дм×1 дм=10 см·10 см·10 см=1000 см$^3$; 1 см$^3$=1000 мм$^3$, 1 км$^3$=1 000 000 000 м$^3$, 1 м$^3$=100 дм$^3$, 1 л=1 дм$^3$.

Табл. 14 «Округление чисел». Верхняя часть таблицы содержит отрезок числовой прямой, на которой отмечены числа от 40,69 до 40,81. Ее следует использовать, поясняя смысл округления: 40,708≈40,7, а не 40,8, так как 40,708 расположено ближе к 40,7, чем к 40,8.

Далее дается правило округления до десятых: 1) выделяется цифра после десятых (в таблице в два столбца даны 10 примеров, в которых в разряде сотых выделены цифры от 0 до 4 и от 5 до 9); 2) выполняется округление (записаны результаты округления рассмотренных примеров). В нижней части таблицы даны образцы округления до сотых (256,3983≈256,40) и до тысячных (179,750389≈179,750).

Табл. 15 «Действия с дробями» (рис. 6). К ней важно система-

6

**ДЕЙСТВИЯ С ДРОБЯМИ**

**ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ**

ЕСЛИ $m \neq 0$, ТО $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$; $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$

**СЛОЖЕНИЕ** **ВЫЧИТАНИЕ**

1) ПРИВЕДИТЕ ДРОБИ К ОБЩЕМУ ЗНАМЕНАТЕЛЮ

2) ВЫПОЛНИТЕ ДЕЙСТВИЯ

$$\overset{2}{\frac{5}{6}}+\overset{3}{\frac{3}{4}}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{10+9}{12}=\frac{19}{12}=1\frac{7}{12}$$

$$\overset{5}{\frac{9}{14}}-\overset{7}{\frac{1}{10}}=\frac{45-7}{70}=\frac{38}{70}=\frac{19}{35}$$

**УМНОЖЕНИЕ** **ДЕЛЕНИЕ**

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot2}{5\cdot7}=\frac{6}{35}$$

$$\frac{3}{5}:\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{21}{10}=2\frac{1}{10}$$

тически возвращаться в ходе решения задач, предлагая найти соответствующий фрагмент и сформулировать (своими словами) соответствующее правило.

Табл. 16 «Действия со смешанными числами» содержит следующие записи:

$$4\frac{3^{\backslash 3}}{8}+2\frac{5^{\backslash 4}}{6}=6\frac{9+20}{24}=6\frac{29}{24}=7\frac{5}{24},$$

$$4\frac{3^{\backslash 3}}{8}-2\frac{5^{\backslash 4}}{6}=2\frac{9-20}{24}=1\frac{33-20}{24}=1\frac{13}{24},$$

$$4\frac{3}{8}\cdot 2\frac{5}{6}=\frac{35\cdot 17}{8\cdot 6}=\frac{595}{48}=12\frac{19}{48},$$

$$4\frac{3}{8}:2\frac{5}{6}=\frac{35}{8}:\frac{17}{6}=\frac{35}{8}\cdot\frac{6}{17}=\frac{105}{68}=1\frac{37}{68}.$$

При первоначальном знакомстве с таблицей необходимо обсудить ход решения каждого из примеров, опираясь на таблицу «Действия с дробями».

Табл. 17 «Пропорции» (рис. 7). В случае возникновения ошибок или затруднений у учащихся при решении уравнений, имеющих форму пропорции, нужно найти аналогичное уравнение в таблице и еще раз рассмотреть ход его решения.

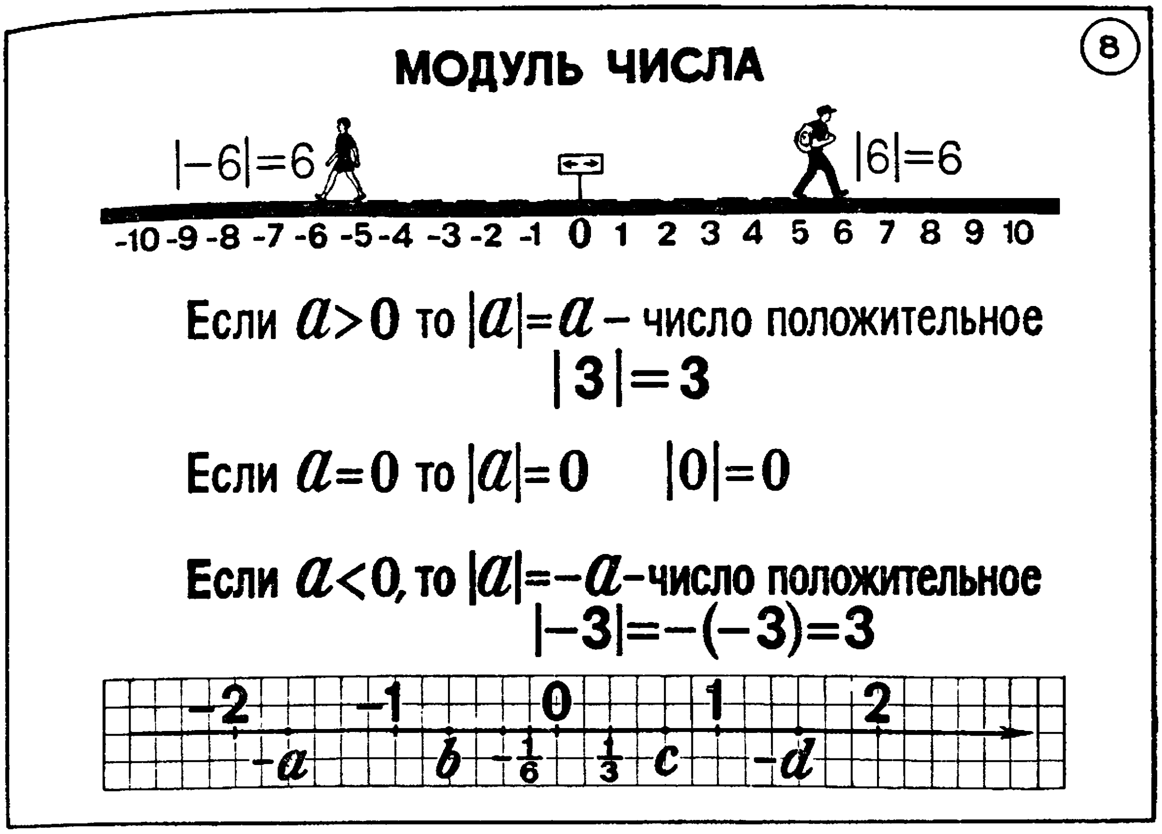
Табл. 18 «Модуль числа» (рис. 8). Фигурки идущих человечков в верхней части таблицы должны напоминать учащимся, что отыскание модуля числа сводится к определению расстояния (числа единичных шагов) от начала отсчета до точки, изображающей данное число. При знакомстве с таблицей необходимо организовать отыска-

**ПРОПОРЦИИ** (7)

Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$

$2:8=4:16 \quad 2\cdot 16=8\cdot 4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{x}{3}=\frac{18}{2}$ | $\frac{-6}{x}=\frac{5}{25}$ | $\frac{8}{4}=\frac{x}{3}$ | $\frac{6}{8}=\frac{-12}{x}$ |
| $2x=18\cdot 3$ | $-6\cdot 25=5x$ | $8\cdot 3=4x$ | $6x=8\cdot(-12)$ |
| $x=\frac{18\cdot 3}{2}$ | $x=\frac{-6\cdot 25}{5}$ | $x=\frac{8\cdot 3}{4}$ | $x=\frac{8\cdot(-12)}{6}$ |
| $x=27$ | $x=-30$ | $x=6$ | $x=-16$ |



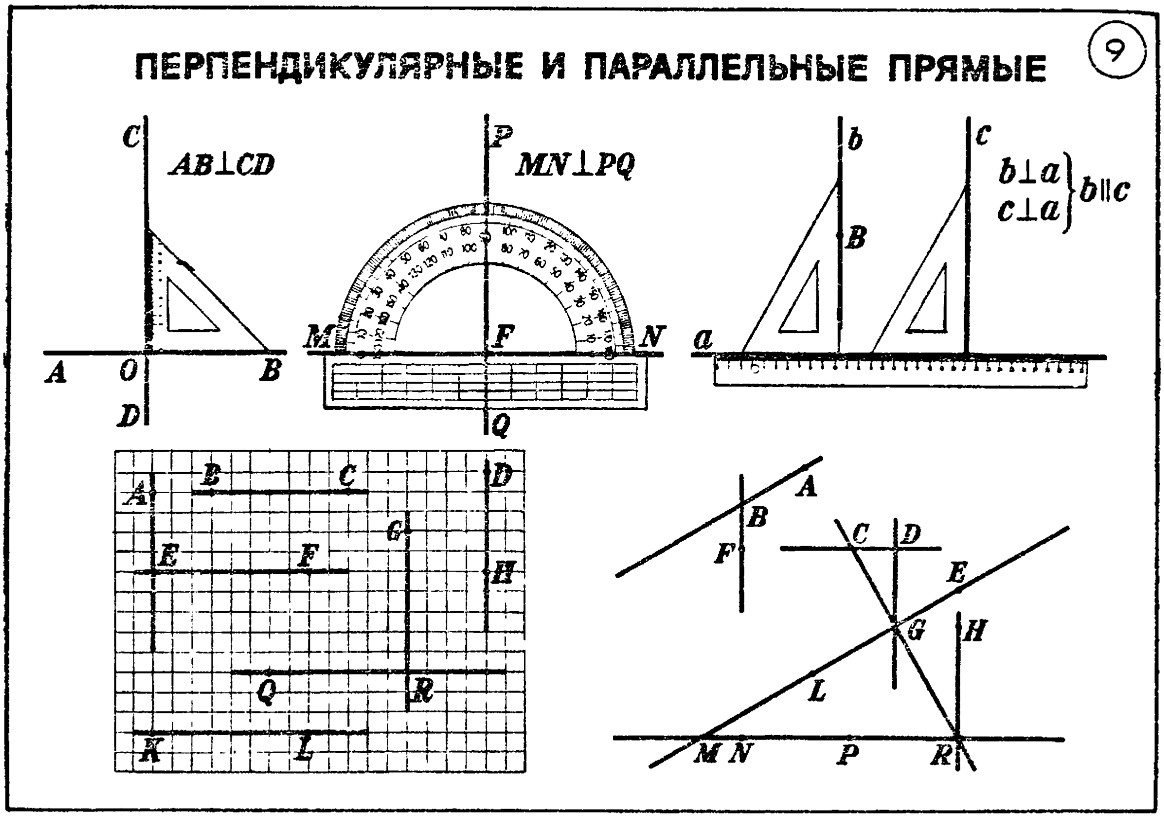

ние модулей чисел и последующее объяснение результатов со ссылками как на соответствующую строку определения, так и на верхний рисунок. Например, если нужно найти $|-6|$, то, во-первых, следует воспользоваться последней строкой определения — отыскать число, противоположное числу —6. Во-вторых, надо вспомнить, что расстояние от 0 до точки —6 равно шести единичным шагам.

Пользуясь нижним фрагментом, важно обратить внимание учащихся на то, что знак «минус» перед буквой означает лишь, что рассматривается число, которое противоположно числу, обозначенному буквой.

Табл. 19 «Сложение. Умножение. Деление». Верхняя часть таблицы служит для напоминания того, как складывать числа с помощью координатной прямой. Здесь показано, что при отыскании суммы $(-3)+(+2)$ следует перемещаться от точки —3 вправо на две единицы, а при отыскании суммы $(+2)+(-3)$ — от точки 2 влево на 3 единицы.

Средняя часть таблицы имеет вид:

| Знаки чисел $a$ и $b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) | | Знак суммы $a+b$ | Модуль суммы $a+b$ |
|---|---|---|---|
| Одинаковые | | Знак чисел $a$ и $b$ | $\|a\|+\|b\|$ |
| Противоположные | $\|a\|>\|b\|$ | Знак числа $a$ | $\|a\|-\|b\|$ |
| | $\|a\|<\|b\|$ | Знак числа $b$ | $\|b\|-\|a\|$ |
| | $\|a\|=\|b\|$ | $a+b=0$ | |




В нижней части таблицы на примерах пояснено правило знаков при умножении и делении: $-6\cdot(+3)=-18$; $-6:(+3)=-2$, $-6\cdot(-3)=+18$; $-6:(-3)=+2$.

Табл. 20 «Перпендикулярные и параллельные прямые» (рис. 9). К верхней части таблицы следует обращаться, если затруднение вызывает определение или построение перпендикулярных и параллельных прямых Нижняя часть служит для организации работы типа «устный счет», связанной с распознаванием и мысленным прочерчиванием перпендикулярных и параллельных прямых. Приведем некоторые из возможных заданий.

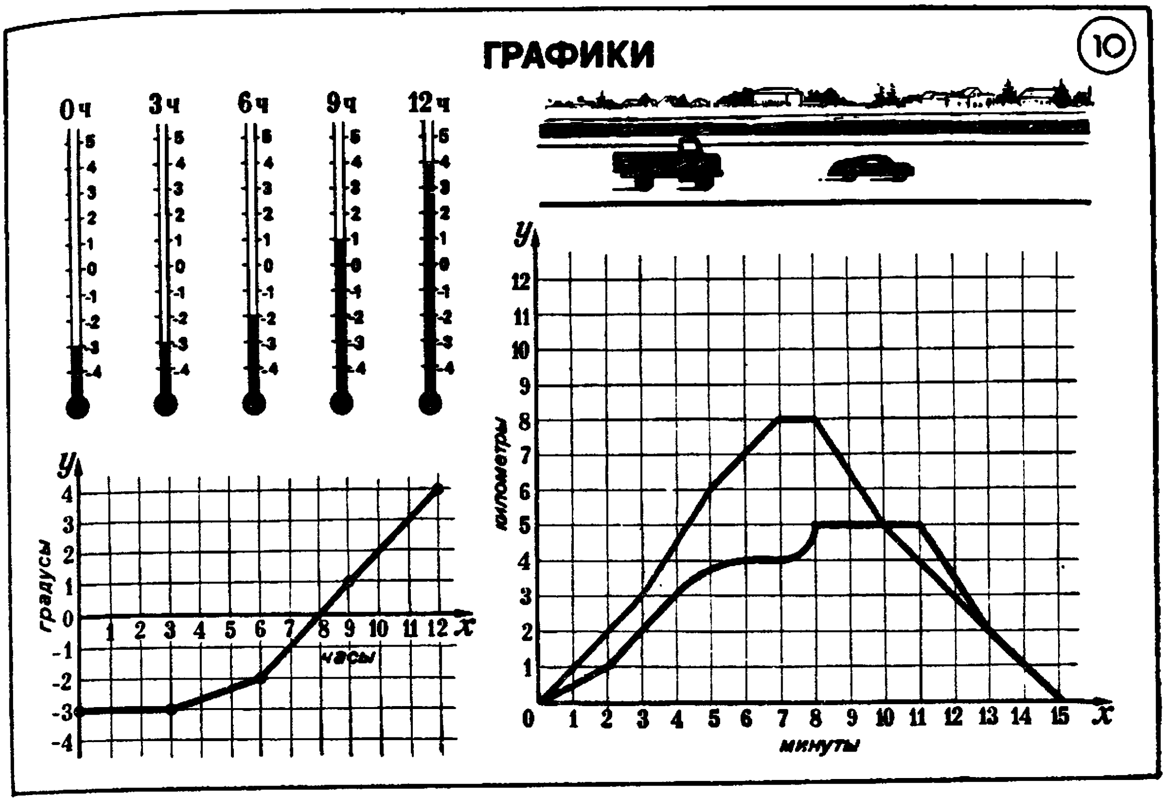
Есть ли на чертеже прямые, перпендикулярные (параллельные) данной прямой?

Перпендикулярны ли (параллельны ли) данные прямые?

Постройте (мысленно) прямую, перпендикулярную (параллельную) данной прямой и проходящую через указанную точку. Перечислите на чертеже точки, принадлежащие этой прямой.

Табл. 21 «Графики» (рис. 10). Полезно обратить внимание учащихся на принцип построения графика в левой части таблицы: построено всего 6 точек, соответствующих показанным в таблице температурам в указанное время. График позволяет приблизительно указать температуру от 0 до 12 ч (если считать изменения температуры равномерными), установить, в какое приблизительно время была указанная температура.

В правой части таблицы изображены графики движения легкового автомобиля и грузовика. Следует подчеркнуть, что обе машины движутся по одной дороге от пункта $A$ и предложить учащимся от-




ветить на такие вопросы: на каком расстоянии от $A$ каждая из машин сделала остановку? Сколько минут стояла каждая машина? С какого момента каждая машина начала двигаться в обратном направлении? Через сколько минут после выезда машины оказались снова в пункте $A$?

Табл. 22 «Раскрытие скобок» содержит записи:

$+(a-b+3)=a-b+3$; $+(-2)=-2$,
$-(a-b+3)=-a+b-3$; $-(-2)=2$.

Табл. 23 «Решение уравнений». В левой части таблицы записан алгоритм решения линейных уравнений с рациональными коэффициентами, левая и правая части которых — целые выражения:

1. Раскройте скобки. 2. Перенесите известные слагаемые в одну часть уравнения, неизвестные — в другую. Переносите слагаемые с противоположным знаком! 3. Приведите подобные слагаемые. 4. Найдите корень уравнения. 5. Запишите ответ.

В правой части таблицы дан пример решения уравнения $2x-3=$ $=(3x+7)\cdot 5$ в соответствии с этим алгоритмом. Учитывая, что единственно новой для учащихся операцией является перенесение слагаемых из одной части уравнения в другую, в таблице специально расшифрован именно этот вопрос. Дана запись:

$$2x-\underline{3}=\overline{15x}+35.$$

Стрелками показано, что подчеркнутые слагаемые переносятся в левую (правую) часть равенства.

Таблицу можно использовать уже при объяснении нового материала.

# О задачах методики математики[1]

**Н. М. Бескин** (Москва)

## 1. Содержание доклада

В докладе рассматриваются некоторые направления в нашей методике математики начиная с 20-х гг. Особое внимание уделяется негативным явлениям и извлечению из них уроков для сегодняшнего дня. Я не собираюсь систематически излагать историю методики, моя цель не в регистрации фактов, а в оперативных выводах.

Доклад составлен не по литературе, а по личным воспоминаниям. Методические течения рассматриваются в крупном плане, без упоминания имен и деталей. Основная установка заключается в том, что методика должна основываться на общей теории, которая рассматривает цели образования, психологию учащихся, взаимоотношения между школьным преподаванием и современной наукой и многие другие общие проблемы. На этой основе должна строиться методика преподавания отдельных разделов и вообще разрешение конкретных вопросов. Без этого методика превратится в собрание рецептов, которые, даже будучи верными, не образуют науки.

## 2. Комплексный метод

В дореволюционной России существовала почти исключительно методика математики (арифметики) для начальной школы. Вероятно, это объяснялось тем, что средняя школа не была массовой. Считалось, что для учителя средней школы достаточно знать свой предмет, а методика ему не нужна. Правда, некоторая методическая литература для средней школы все-таки была. Были переводные руководства (Д. В. А. Юнг, М. Симон). В 1912 г. начал выходить журнал «Математическое образование» (орган Московского математического кружка). Его выпуск прервался в 1914 г. после начала войны и был временно возобновлен в 1928.

После революции методическая литература превратилась в мощный поток. Появилось множество новых идей, иногда полезных, иногда нет. Проводились смелые эксперименты, многие из которых оказались неудачными и были отвергнуты. Мы не должны их забывать, а должны анализировать.

В большинстве случаев в основе метода, который впоследствии был отвергнут, лежала разумная идея, но она была доведена до абсурда людьми, не понимавшими, что педагогика и методика есть наука о разумной мере. Крайности ей противопоказаны. Всякий методический прием должен применяться сбалансированно. Если же насильственно подгонять под него весь педагогический процесс, то результаты всегда будут

---

[1] Доклад, прочитанный на юбилейном заседании секции средней школы Московского математического общества 20 октября 1988 г.

отрицательными. Методика — обширная разветвленная наука, она не может быть сведена к одному простому правилу или лозунгу.

Из всех экспериментов такого рода я помню только один, основанный на ложной идее, т. е. порочный по существу. Это — комплексный метод. Он требовал, чтобы в каждой школе или классе преподавание всех предметов группировалось вокруг одной темы. Например, в одной известной мне сельской школе (первая половина 20-х гг.) такая центральная тема была «Колодец». Содержание задач по арифметике должно было быть связано с колодцем (число ведер, глубина, площадь зеркала воды). Физика занималась определением глубины путем отражения звука, поверхностным натяжением. Учитель русского языка должен был разыскивать для диктанта цитаты из литературных произведений, в которых фигурировал бы колодец, и т. д. В другой школе был комплекс «Почта».

Сегодня нет необходимости критиковать этот метод. Однако причина, породившая его, не исчезла. Она представляет опасность и сегодня. Эта причина — стремление к обучению на знакомом материале.

В некоторых статьях и книгах предлагается обучать сельских школьников на сельскохозяйственной тематике. Правильно ли это?

Всякий человек черпает некоторые знания непосредственно из собственного опыта. Если даже его совсем ничему не учить, он все-таки что-то будет знать. Цель образования — расширить этот круг знаний и дать учащемуся то, чего он на собственном опыте узнать не может. Сельский школьник хорошо знает, какова урожайность пшеницы или производительность трактора определенной марки. Он знает окружающий его растительный и животный мир, но не знает, какие сельскохозяйственные культуры разводят в Центральной Африке, какие птицы живут в Антарктиде, как устроена Солнечная система. На собственном опыте он узнать этого не может, и это должно дать ему образование. Урожайность пшеницы и производительность трактора полезнее для городского школьника, который об этом не имеет понятия.

Разумеется, я не призываю полностью запретить знакомую тематику. Полезно узнать, что повседневно знакомые явления могут быть обработаны математически.

Методика есть наука о разумной мере. Ей противопоказаны крайности!

В отличие от комплексного метода в основе дальтон-плана и лабораторно-бригадного метода (вторая половина 20-х — первая половина 30-х гг.) лежали разумные идеи. Применение этих методов нанесло вред школе потому, что они насаждались неквалифицированно, без всякой подготовки и сразу в масштабе всей страны. Оба эти метода прочно позабыты. Нельзя одобрить такое шараханье от одной крайности к другой. Они заслуживают изучения. С ними должны быть знакомы студенты пединститутов и учителя. В недалеком будущем в школе не будет полного единообразия и учителя смогут по желанию применять различные методические приемы.

### 3. Следование моде

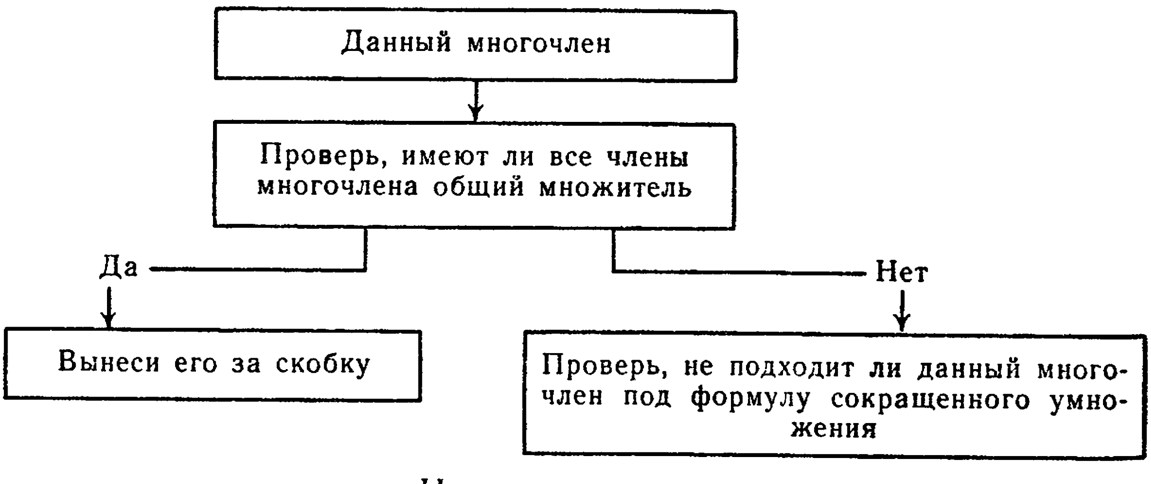
Большой вред нашей школе нанесли и продолжают наносить конъюнктурщики, которые заботятся лишь о том, чтобы произносить модные слова. В конце 50-х — начале 60-х гг. в школе внедрялось политехническое обучение. В частности, требовалось, чтобы учащихся знакомили с практическими приложениями математики. Это разумно, но и в этом деле можно разбить себе лоб, нарушая разумную меру. Вспомним, как это преломилось в преподавании геометрии.

В курсе геометрии чрезмерно много места стали занимать измерения на местности. Выходило множество статей и даже книг на эту тему. Ей было посвящено много задач в задачниках. Была нарушена разумная мера вещей. Создавалось впечатление, что измерения на местности — единственное приложение геометрии. Это абсурдно и вредно, потому что создает у учащихся превратное представление о роли геометрии. Кроме того, насыщение курса измерениями на местности не помогает лучшему усвоению геометрии. Положение, что через две точки можно провести единственную прямую, легко иллюстрируется проведением карандашом такой линии по линейке. Оно не станет яснее от того, что учащиеся вобьют в землю два колышка и натянут на них веревку. Все это было нужно лишь для того, чтобы шуметь о политехнизации.

Это явление продолжается и до наших дней. К счастью, здравый смысл массы учителей отвергает вредные перегибы. Теперь многие уже забыли крайности программированного обучения, а кибернетические крайности до сих пор не изжиты. Они пропагандируются конъюнктурщиками, стремящимися к модному, не зная меры. Эти крайности основаны на предположении, что человек мыслит так же, как работает машина. Вот пример.

В одной книге предлагается таблица для учащихся по теме «Разложение многочлена на множители».

Таблица




И т. д.

Подобные таблицы не могут научить разложению многочлена на множители. В таблице предусмотрен каждый шаг, а ведь цель преподавания — научить учащихся самостоятельно находить этот шаг и самостоятельно решать несложные вопросы, даже нестандартные. Человек в отличие от машины не должен перебирать все возможности, а должен интуитивно находить правильный путь.

Кибернетическая тенденция существует и в методической литературе, и в школьной практике. Она проявляется и в отношении к задачам.

## 4. Задачи

В методической литературе постоянно обсуждается вопрос: как помочь ученику находить путь к решению задачи. Это — важная проблема, но, к сожалению, и сюда проник кибернетический уклон.

Единственно правильный путь заключается в достаточном знании теории и в наличии достаточной практики. Впрочем, второе условие неприменимо к той ситуации, когда учащийся только еще изучает данный раздел. Оно относится к тому времени, когда это изучение уже закончено.

Некоторые авторы стали разрабатывать способы, помогающие 1) помочь учащимся *быстрее* находить путь к решению задачи, 2) предохранить их от ошибок в процессе решения. На первый взгляд это разумные цели, но только на первый взгляд. Если бы мы привыкли решать все частные вопросы, исходя из общей теории, то начали бы с вопроса: для чего решаются задачи? Методическая цель решения задачи не в получении ответа. Задачи решаются для того, чтобы лучше усвоить теорию, научиться ее применять, чтобы приобрести навыки, а главное — чтобы развить инициативу и способность самостоятельно мыслить. Каждая решенная задача — маленькая ступенька длинной лестницы овладения математикой. Каждая задача имеет свою методическую цель. Поэтому при решении задачи главная забота учителя заключается в том, чтобы выжать из нее всю возможную пользу для математического развития ученика. Решение задач в классе под руководством учителя имеет другое назначение, чем самостоятельное решение. Учитель должен обратить внимание учеников на поучительные выводы, которых они могли бы не заметить при самостоятельном решении, извлечь уроки на будущее, выяснить, что было бы при некоторых изменениях условия, и т. д.

Если ученик быстро решает задачу потому, что он хорошо овладел теорией и приобрел достаточный опыт,— это хорошо. Если же он вооружен мнемоническими правилами и поверхностными эвристическими советами («если дана точка внутри угла, посмотри, не будет ли полезно построить точку, симметричную относительно биссектрисы»), то решение задач не принесет особой пользы его математическому развитию.

Ошибки учащихся в процессе решения задач не вредны, а полезны. Ошибка (речь не о случайных и технических ошибках) — симптом непонимания. По ошибкам учитель определяет, чего не понял ученик, подобно тому, как врач по симптомам болезни ставит диагноз. Но лечить надо не симптомы, а болезнь. Так и учитель должен не просто исправить ошибку, а «выкорчевать» ее. Для этого надо понять причину заблуждения ученика. Не надо загонять ошибки внутрь, пусть ученики их делают. Ошибки редко бывают индивидуальными. Опытный учитель знает, что из года в год в каждом разделе математики ученики делают одни и те же ошибки. Это дает учителю повод делать нужные разъяснения.

Выходит, что не следует ставить целью решение задач быстро и безошибочно. Задачи надо решать не торопясь и глубоко их разбирая.

Сказанное относится к решению задач в процессе прохождения какого-нибудь раздела. Другое дело — после окончания этого раздела. Там ошибки свидетельствуют о недоработке.

## 5. Олимпиадные задачи

Олимпиадные задачи не предназначены для массового школьного преподавания, а для воспитания особо талантливых школьников. Это совершенно новая ветвь математического преподавания, выросшая на пустом месте. Она возникла в 30-е гг. Раньше ее не существовало, и даже высказывалось мнение, что множество интересных нестандартных задач по геометрии конечно и численность его оценивалась в 300—400. Развитие олимпиадной литературы опровергло этот взгляд. Эта литература сейчас обширна и продолжает расти. Достойно удивления, как неисчерпаем этот источник, как появляются все новые и новые задачи с глубокими и интересными идеями.

Хотя олимпиадные задачи не предназначены для школьного преподавания, рост этой литературы не мог не повлиять на него. А скорее всего имеет место взаимное стимулирование. Олимпиадные задачи пробуждают у части школьников интерес к математике и способствуют созреванию их таланта. Множатся математические олимпиады. Теперь они охватывают классы, начиная с V. Это движение представляет большой успех.

## 6. Роль психологии

Некоторые ошибки нашей методики связаны с недооценкой роли психологии. Автор учебника при написании каждого слова должен думать, как поймет его школьник. Методисты увлеклись построением школьного курса по системе Бурбаки. Тем самым был нарушен важный психологический закон: ни один школьник, даже самый способный, не может подняться на высоты абстракции иначе, как по лестнице. А лестница состоит из ступенек. Это — принцип концентризма.

В 60—70-е гг. у нас появились учебники, цель которых была приблизить школьное преподавание к современной науке. Эти учебники затем были отвергнуты, несмотря на то что они содержали множество интересных методических идей. Они обладали многими локальными (но не органическими) недостатками. Локальный недостаток можно исправить, а органический нет. Все недостатки заключались в том, что не учитывалась психология школьников. Во-первых, часто выбирались нецелесообразные (с точки зрения психологии) определения. Во-вторых, употреблялись сложные и педантичные терминология и система обозначений.

Возьмем, например, определение вектора через параллельный перенос, применяемое в некоторых учебниках геометрии. Его многие критиковали. Старое определение вектора как отрезка с упорядоченными концами неудовлетворительно. Было принято считать, что два вектора, параллельные, сонаправленные, одинаковой длины, равны между собой. Но если они равны, то это не два вектора, а один и тот же вектор. Так же как не существует равных чисел, не должно существовать равных векторов. Каждое число существует в одном экземпляре и равно только самому себе. Равенство $2\cdot3=6$ означает, что $2\cdot3$ и $6$ — одно и то же число, определенное разными способами, и школьники старших классов должны это ясно понимать. Поэтому, чтобы оправдать такое определение равенства векторов, следует считать, что множество всех отрезков, параллельных, сонаправленных, одинаковой длины, представляет один вектор. Каждый из этих отрезков можно считать *представителем вектора.* Логически это совпадает с определением вектора как параллельного переноса. Параллельный перенос есть геометрическое преобразование. Геометрическое преобразование есть закон, который каждой точке ставит в соответствие ее образ. Множество параллельных, сонаправленных отрезков одинаковой длины и определяет геометрическое преобразование, называемое параллельным переносом: началу каждого отрезка соответствует его конец. Верно и обратное. Поэтому эти два определения логически эквивалентны. Но они не эквивалентны психологически. Требуется длительное психологическое созревание, чтобы понять их эквивалентность.

Усложненные терминология и система обозначений также были причиной неуспеха этих учебников. Излишний педантизм в этих вопросах отвлекает внимание учащихся от существа дела на то, как надо выразиться или как записать. Точность терминологии и обозначений имеет единственную цель: не допустить путаницы. Если в одном случае сказано, что отрезок $a$ перпендикулярен плоскости $\alpha$, а в другом — что отрезок $a$ равен 3 см, то совершенно ясно, что в первом случае имеется в виду отрезок как геометрическая фигура, а во втором длина отрезка. Поскольку недоразумений быть не может, незачем вводить для этих случаев различные термины и различные обозначения. Полная точность терминологии недостижима. В одной задаче требуется найти длину эллипса, а в другой площадь эллипса. Никаких недоразумений от того, что в этих случаях слово «эллипс» имеет разный смысл, не возникает.

Однако учебники, о которых идет речь, имеют громадные достоинства, несравнимые с их недостатками. Они — результат очень большой и высококвалифицированной работы по коренному пересмотру всей системы школьного курса математики. Я думаю, что подавляющее большинство учителей признает, что эти учебники открыли для них новые горизонты и заставили задуматься над основными понятиями и методами математики. Для школы они в настоящем виде не годятся, потому что школьный учебник должен быть в методическом отношении идеальным. Если в нем 9/10 выдающихся достоинств и 1/10 недостатков, то он не годится. Но выбросить его в корзину для бумаг — вандализм. А это произошло. Некоторые методисты самый термин «множество» считают запретным. Методика должна проявить к этим учебникам пристальное внимание. Они заслуживают изучения и разбора. Возможно, другие авторы используют заложенные в них идеи. Им еще предстоит сыграть свою роль.

Теперь выскажусь о роли психологии в общем виде. Психология могла бы много дать для преподавания математики. Могла бы, но не дала. Несомненно, что в обширной психологической литературе есть полезные работы. Они большей частью посвящены анализу усвоения учащимися разных разделов математики и таким образом осведомляют учителя математики о трудностях, которые испытывают учащиеся, и дают этим трудностям психологическое объяснение. Но труды общего характера не приносят нам пользы. Они часто заняты подведением психологической или философской базы под тривиальные ситуации. Они предлагают упрощенные схемы, в которые должно укладываться преподавание математики. Таких схем быть не может. Преподавание математики — сложный и разветвленный процесс, и поднять его каким-нибудь простым приемом нельзя. Его можно поднять только повышением культуры всей массы учителей. Это долгий и трудный путь, но другого нет (вспомним замечание Евклида о царском пути в геометрии).

Мы с психологами говорим на разных языках. Давно замечено, что если инженер обращается к математику с просьбой оказать ему математическую помощь в решении инженерной задачи, то это в большинстве случаев приносит мало пользы. Инженер не знает, как сформулировать свою задачу на математическом языке, а математик не понимает содержания его задачи или понимает по-своему. Сотрудничество инженера с математиком плодотворно лишь тогда, когда математик по существу вошел в его тематику и хорошо понимает смысл его задач. Таково же должно быть и взаимное сотрудничество психологов с методистами и учителями математики.

## 7. История

Я имею в виду два разные вопроса: 1) история математики, обслуживающая школьное преподавание, 2) история методики математики для учителей.

Введение в преподавание исторических элементов имело бы громадное значение. Было бы нереалистично требовать включения в школьный курс систематической истории математики. Речь идет только об элементах, вкрапленных в некоторые места. Такие элементы поднимают математическую культуру учащихся. Наши школьники не имеют никакого представления о развитии математики. Они думают (если вообще думают об этом), что алгебраическая символика всегда была такой, как сейчас, и что древние математики определяли косинус как проекцию единичного вектора на ось абсцисс. Познавая эволюцию какого-нибудь понятия или метода, мы их лучше понимаем. Кроме того, это повышает интерес к математике. Польза от знакомства с историей математики выходит за рамки математики. Это знакомство важно для мировоззрения ученика, ведь иначе он не знал бы, что наука развивается и что ее сегодняшнее состояние не окончательное.

По истории математики есть много хороших работ. Есть книги, тематика которых приспособлена к содержанию школьного курса. Есть биографии ученых. Есть исторические задачи. Есть хрестоматии, содержащие фрагменты из работ классиков с квалифицированными комментариями. Таким образом, учителю есть из чего выбирать и на что опереться, если он хочет ввести в преподавание исторические элементы. Но к сожалению, среди исторических пособий для школы преобладают плохие и даже вредные. Поэтому учитель должен быть осторожен в выборе. Книги, которые имеются в виду, обладают одними и теми же стандартными недостатками.

1. В них нет или почти нет математики. Все их содержание сводится к биографиям математиков и к забавным анекдотам о них. Но перед школьной математической литературой стоит единственная задача: заинтересовать учащихся математикой и повысить их математическую культуру. Биографический материал и анекдоты приемлемы только в качестве приправы. Какой смысл имеет биография ученого, если в ией не раскрываются его научные результаты? Рассказ о том, как Ньютон варил часы вместо яйца, не помогает лучше понять законы механики.

2. Слишком низкий литературный вкус. Цитируются плохие стихи. Описывается ритуал школьных математических вечеров.

3. Авторы не пользуются первоисточниками, а переписывают материал друг у друга. Если один напишет понаслышке что-нибудь неверное, эта ошибка канонизируется и повторяется.

Доброкачественная литература по истории математики, созданная с хорошим литературным вкусом, крайне необходима школе. В нашей стране есть специалисты самой высокой квалификации по истории математики, но ни один из них не пишет для школы.

Положение с историей методики и историей преподавания математики обстоит еще хуже. Невозможно обозреть все статьи по этой тематике. Среди них найдутся полезные и интересные. Но по столь важной отрасли необходимы и общие труды. Они существуют (и по средней и по высшей школе), но обладают следующим недостатком: они представляют перечислительство. Перечисляются книги и учебники, перечисляются фамилии деятелей, но не раскрыта картина процессов. Создание хороших монографий по истории преподавания математики — важная (пока не решенная) задача для наших методистов.

## 8. Занимательная математика

Занимательная математика достигла больших успехов. Она играет большую роль в привлечении к математике младших школьников. В дореволюционное время были (не считая публикаций) лишь книги Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки» и «Математические игры, развлечения и задачи». В наше время есть обширная литература, в том числе непревзойденные книги Я. И. Перельмана. К занимательной математике относятся темы, имеющие следующие признаки:

1. Занимательное содержание (например, задача о кроликах и фазанах).

2. Неожиданный результат, противоречащий интуиции (например, задача о зернах на шахматной доске).

3. Нестандартность. Для решения не подходят методы, которым обучают в школе, а требуется самостоятельное размышление, обычно очень простое, но неожиданное (например, задачи, решаемые «с конца»).

Занимательная математика может принести большую пользу для развития у детей сообразительности, умения рассуждать самостоятельно и интереса к математике.

Занимательная математика играет некоторую роль и для старших возрастов и даже в высшей школе. Однако и здесь надо избегать перегибов. Разве занимательная математика — единственный путь вовлечения детей в математику? Кто так думает — недооценивает красоту и привлекательность математики. Он думает: математика сама по себе наука сухая и скучная, но если облечь математические вопросы в занимательную форму, то учащиеся могут ими заинтересоваться. Это неверно. Хороший учитель умеет заинтересовать самим существом математики. Использование занимательных элементов на любой стадии обучения не возбраняется, но нельзя возлагать все надежды только на них. Методика есть наука о разумной мере.

Советская литература по занимательной математике заслуживает самой высокой оценки.

## 9. Приемные экзамены в высшую школу

Приемные экзамены в вузы — инородное тело в системе народного образования. Сложившаяся система вызывает следующие возражения.

Зачем нужны приемные экзамены? Средняя школа, выдавая своему выпускнику аттестат зрелости, тем самым удостоверяет, что он получил среднее образование и, следовательно, подготовлен к учебе в высшей школе. Наша средняя и высшая школа принадлежит одному государству, и у них не может быть различных требований, одни — к выпускнику, другие — к абитуриенту. Это все равно, что ввести выпускные экзамены в VIII классе и после них вступительные экзамены в IX класс. Почему же высшая школа подвергает абитуриента проверке? Либо она не доверяет аттестату зрелости, либо вступительные требоваиия отличаются от выпускных. Оба предположения справедливы, но первое из них имеет большее значение. Получается, что аттестат зрелости не имеет правового значения и что государство не доверяет самому себе. Необходимо либо подтянуть среднюю школу и добиться того, чтобы аттестат зрелости был полноценным, либо высшей школе приспособиться к существующему положению.

Второе предположение также справедливо. Ежегодно издается программа вступительных экзаменов в вузы, и она несколько отличается от школьной программы. Как уже сказаио, разница в программах недопустима с правовой точки зрения, и поэтому программа вступительных экзаменов не имеет права на существование.

В дореволюционной России аттестат зрелости давал право поступить в высшую школу (без экзаменов!). Лишь в тех случаях, когда число желающих поступить в данный вуз превышало число вакансий, устраивался конкурсный экзамен или конкурс аттестантов. Я считаю целесообразным ввести такой порядок. Он придаст больший вес выпускным экзаменам в средней школе. Он избавит абитуриентов от мучительной процедуры и затраты нервной энергии. Он подрежет корни репетиторства. Он сэкономит большие средства, затрачиваемые на проведение вступительных экзаменов. Он вернет абитуриентам каникулы перед началом занятий в вузе. Он увеличит на один месяц срок занятий в высшей школе. Теперь драгоценное время, которое можно было бы использовать для учебных занятий, бесполезно тратится на экзамены.

Не надо бояться снижения качества. Примные экзамены заслуживают еще меньше доверия, чем выпускные экзамены в школе. Их результат гораздо больше зависит от случайностей.

Разумеется, в случае отмены приемных экзаменов следует поднять уровень выпускных. Можно ввести в школе госприемку, как в промышленности. Для этого следует привлечь к выпускным экзаменам преподавателей высшей школы. Есть множество других организационных возможностей. Например, можно ввести в средней школе аттестаты зрелости двух уровней: одни дают право поступления в высшую школу без экзаменов, другие не дают.

Могут сказать, что я отклонился от темы и вопрос о вступительных экзаменах не имеет отношения к средней школе. Ведь водитель автомобиля не отвечает за безопасность пассажира после того, как он покинул машину. Но это не так. Приемные экзамены деформируют школьное преподавание. Они представляют важный фактор, не подчиненный органам просвещения и оказывающий сильное влияние на школу. Учитель выпускного класса вынужден с ними считаться. Если большая часть его учеников не сможет сдать вступительных экзаменов, это дурно отразится на его репутации. Ему приходится решать не такие задачи, которые он считает целесообразным, и не такие, которые рекомендует методическая литература, а такие, которые задают на вступительных экзаменах. Получается, что внешний фактор, стихийный и неуправляемый, вмешивается в преподавание в X классе. Притом он вмешивается не полезным, а вредным образом. Вместо того чтобы поднимать математическую культуру школьников и знакомить их с важными математическими идеями, приходится заниматься почти исключительно тренировкой в решении таких задач, которые нравятся экзаменаторам.

## 10. Давление на школу

Самое большое зло современной школы — чрезмерная и мелочная опека над учителями. Начинается она с самого верха. Министерства просвещения и высшей школы до последнего дня своего существования публиковали в своих органах формы бланков для различных заявлений и отчетных документов. Инспектор опекал учителей по методической части. Если он был недостаточно культурен, он вводил свои личные вкусы в закон и считал недостатком отступление от этого закона.

Постараемся понять причины этого явления. Только тогда мы сможем его преодолеть.

Первая. Предполагается, что компетентность зависит только от должности. Поэтому всякий человек, занимающий административную должность в системе просвещения, уже в силу этого компетентен в методических вопросах и может предписывать учителям действовать определенным образом.

Вторая. Учителя и методисты могут ошибаться. Среди них есть люди недостаточно квалифицированные и безответственные фантазеры. Если им предоставить свободу действий, они могут повести школу в ложном направлении. Высшие же лица, от заведующего роно до министра, ошибаться не могут. Поэтому они должны руководить работой учителей до мелочей включительно.

Первая из этих установок не заслуживает обсуждения. Займемся второй.

Опыт и здравый смысл говорят, что ошибаться могут все. Учителя бывают разные. Есть средний уровень, есть отклонения от него в ту и в другую сторону. Со временем культурный уровень учителей будет расти, но никогда не будут все учителя одинаковой квалификации. Всегда среди них будет некоторая доля плохих или легкомысленных. Но (это очень важно!) любая ошибка учителя менее опасна, чем ошибка министра. Учитель может плохо обучить несколько классов, министр же может погубить математическое образование нескольких поколений. Мы все ощущаем, какой вред нанесло школе шатание от одной крайности к другой, слишком частая смена программ и учебников. Речь идет не о естественном усовершенствовании программ и учебников, а о полной смене установок. Поразительно, что это явление, которое у всех на виду, не приводит к изменению самой системы управления просвещением. Все важные повороты не учитывают коллективного мнения десятков тысяч учителей, а решаются спешно создаваемыми комиссиями. Дело не в том, что какая-то комиссия по программам и учебникам ошиблась, а в самой системе поручать решение важных вопросов таким комиссиям.

Говорят, что когда муравьи тащат в муравейник насекомое или травинку, то они не все двигаются в правильном направлении. Некоторые тянут под углом, а некоторые даже назад, но равнодействующая всегда направлена прямо к муравейнику. Таким же образом будет и с учителями, если каждый из них почувствует, что у него есть право голоса. Отдельный учитель может принести своими действиями вред, но опыт и здравый смысл всей массы учителей — надежная гарантия от ошибок, гораздо более надежная, чем мнение комиссии, состоящей из пяти академиков.

Отдельный учитель работает не в вакууме. Коллектив удержит его от грубых ошибок. Если же в редких случаях не удержит — ничего не поделаешь. К сожалению, нет способа, который полностью исключил бы возможность ошибок, но надо стараться сделать их менее вероятными и менее массовыми. Для этого надо издавать много учебников (грамотных) и методических пособий. Учебники и программы надо обсуждать в методической печати постоянно, а не только тогда, когда их надо заменить. Надо учитывать общественное мнение. Этого достаточно, чтобы кривая успеха шла вверх.

Учителя, который вводит и активно пропагандирует свой метод, называют учителем-новатором. Его деятельность могла бы помогать постоянному улучшению школьного преподавания. Однако это не всегда так. Бывает, что она даже приносит вред. Как это может быть? Этому есть три причины.

Первая причина заключается в неправильной оценке рационализаторского предложения. Методический прием, имеющий локальное значение, выдается за фундаментальный принцип, лежащий в основе преподавания математики. Иногда он даже преподносится как единственный или главный принцип. В этом качестве он вреден, потому что стимулирует насильственную подгонку всех вопросов преподавания математики под единую схему, иногда примитивную. Это вызывает деформацию преподавания, потому что нет единой простой схемы, в которую укладывается вся методика.

Вторая причина в том, что не всякое хорошее предложение может быть использовано каждым учителем. Работа учителя связана с его индивидуальностью. Образ действий, дающий хорошие результаты у одного учителя, может быть неподходящим для другого. Одно дело внимательно анализировать чужой опыт, совсем другое механически подражать ему.

Добавим, что учитель-новатор часто заблуждается относительно причин своего успеха. Он придумал частный прием и достиг успеха, но причина успеха не в этом приеме, а в том, что он талантливый учитель и энтузиаст. Тот же прием у другого учителя может не дать хороших результатов.

Третья причина — самая вредная и неприятная — заключается в том, что опыт учителя-новатора иногда насаждается насильственно. Отчасти в этом бывает виноват сам автор. Если он человек пробивной — он настойчиво добивается публикаций и пишет жалобы в высокие инстанции. Но чаще виноват не он сам, а администрация просвещения. Администрация объявляет внедрение опыта новатора $N$ обязательным. Обычно это происходит на ранней стадии, когда метод еще недостаточно проверен на опыте и недостаточно обсужден в нормальных условиях.

Опыт учителей-новаторов постоянно обсуждается в общей прессе — в газетах и журналах. Это хорошо. Опыт следует показывать и обсуждать. Плохо, если это обсуждение производится некомпетентно и односторонне, т. е. не представлены другие точки зрения. Еще хуже, когда газета или журнал грубо обвиняет неприсоединившихся в разных грехах. Бывает, что директор школы — нематематик, прочтя такую статью, оказывает давление на учителя математики: «Почему Вы до сих пор не перестроили свою работу по методу учителя-новатора $N$?». Кроме того, есть множество молодых учителей, еще не имеющих достаточного опыта и собственных методических убеждений. Категорические статьи в прессе их пугают и гипнотизируют. Они чувствуют себя виноватыми, что не успели освоить прогрессивную систему.

Учителям необходима свобода творчества. Каждый учитель вправе иметь собственное отношение к любому методическому вопросу. Новые методы следует пропагандировать и обсуждать без насилия.

## 11. Заключение

Семь лет назад я выступил в нашей секции с докладом на тему «Прогрессирует ли преподавание математики?». Содержание его можно резюмировать одним словом: «да». Впрочем этот ответ зависит от того, какой отрезок времени мы рассматриваем. Если 5—10 лет, то медленные изменения незаметны, если же 60—70 лет, то прогресс очевиден. Не имея возможности повторить содержание того доклада, я вкратце сформулирую результат. Старая система основывалась на заучивании, новая — на мышлении. Идейный математический уровень современного школьника значительно выше уровня его сверстника начала века.

Почему же, несмотря на ошибочные методы руководства, преподавание улучшается? Потому что здравый смысл массы учителей и методистов берет верх.

Правильное руководство, не угнетающее самостоятельность учителей и считающееся с общественным мнением, значительно ускорило бы этот процесс. У Пушкина сказано: «Наука сокращает нам опыты быстротекущей жизни». Очень точная формулировка: сокращает. В конце концов мы все равно нащупаем правильный путь, но желательно сделать это быстрее и без лишних потерь.

Секция средней школы Московского математического общества когда-то играла важную роль в поднятии культуры математического образования. Она не имела (и не должна иметь!) никаких административных прав. Это общественная организация. На ее заседаниях обсуждались принципиальные вопросы методики, и, хотя она не принимала никаких резолюций и не производила голосований, к этим обсуждениям прислушивались учителя и органы просвещения. Сейчас ее влияние упало. Для пользы школы его надо восстановить.

# Более простое доказательство теоремы

В курсе геометрии VIII класса изучается теорема 10.6 (см.: П о г о р е л о в А. В. Геометрия: Учеб. пособие для 6—10 классов. М.: Просвещение, 1987. С. 140), первая часть которой сформулирована так: «У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны». Доказательство этого утверждения вызывает некоторые затруднения даже у учащихся, обучающихся в классе с углубленным изучением математики. Пожалуй, самый трудный момент — это введение вспомогательного вектора $\bar{c}=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\bar{b}$. Почему именно этот вектор?! Да потому, что он указывает путь к доказательству первой части теоремы 10.7. Но как догадаться об этом ученику?

Рассматривая с учащимися книжное доказательство, мы пришли к более естественному, на наш взгляд, доказательству. Вот оно.

Пусть $\bar{a}(a_1, a_2)$ и $\bar{b}(b_1, b_2)$ — два коллинеарных вектора. Отложим от начала координат векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, равные соответственно $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Из определения коллинеарных векторов следует, что точки $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ лежат на прямой $AB$, проходящей через начало координат; ее уравнение $y=kx$. Следовательно, $a_2=ka_1$ и $b_2=kb_1$, откуда $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}$ или $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$.

При таком подходе к доказательству отпадает необходимость делать соглашения о направлении векторов.

**А. Н. Смоляков** (Ставропольский край, г. Нефтекумск)

# Еще раз о сумме углов многоугольника

Разнообразие форм вывода формулы суммы внутренних углов выпуклого многоугольника не должно исключать строгости рассуждений

*Рис. 1*

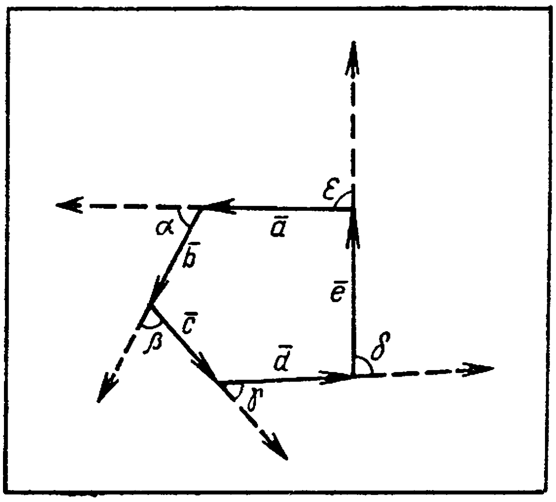
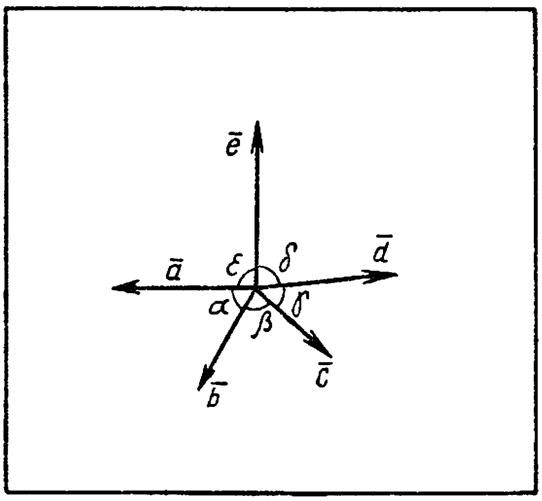



*Рис. 2*



при доказательстве. Ведь рисунок следует рассматривать только как иллюстрацию, не обладающую доказательной силой. В дополнение к заметке В. Е. Синько (Математика в школе. 1989. № 2) предлагаю следующий ход рассуждений (см. рис. 1, 2).

По правилу сложения векторов $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e}=\bar{0}$. Если приложить эти векторы к одной точке, их равнодействующая будет равна нулю. А так как при параллельном переносе величина углов сохраняется, то $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=360°$. Отсюда $\Sigma_n=180°\cdot n-360°=180°(n-2)$.

**Р. Л. Аракелян** (г. Степанакерт НКАО)

## Сказка о Канторе и кванторе

В недавно выпущенной издательством «Высшая школа» брошюре Л. Ф. Штернберга «Скоростное конспектирование» на с. 5 я обнаружил следующее немало удивившее и позабавившее меня место:

*«Урок 1. О Канторе и кванторе*

Кантор придумал кванторы. Это не каламбур, а исторический факт: немецкий математик Георг Кантор придумал и ввел в математическую запись знаки, получившие название кванторов: $\forall$ — каждый, всякий, для каждого; $\exists$ — существует.

Эти знаки представляют собой перевернутые первые буквы немецких слов Alle — *все* и Existieren — *существовать*. Эти слова распространены в математических текстах, и для экономии времени Кантор и придумал эти сокращения».

К предложению «$\forall$ — каждый, всякий, для каждого» имеется сноска: «Многие читают этот значок как «любой» — это ошибка: слова «каждый» и «любой» не синонимы. Если сочетания «для каждого $x$» и «для любого $x$» равносильны, то фразы «поставьте букву у каждого угла...» и «поставьте букву у любого угла...» имеют разный смысл».

В действительности создатель теории множеств Г. Кантор не только не придумал кванторы, но и никогда не пользовался ими (и вообще символикой математической логики). Кванторы ввели в употребление независимо друг от друга немецкий математик и философ Готлоб Фреге (1848—1925) и несколько позже американский логик Чарльз Сандерс Пирс (1839—1914), ссылавшийся как на автора идеи на своего соотечественника О. Митчелла. Общепринятое сейчас обозначение $\exists x$ для квантора существования ввел итальянский математик Джузеппе Пеано (1858—1932), обозначение $\forall x$ для квантора общности — немецкий математик Герхард Генцен (1909—1945). (Кванторами называются именно выражения $\forall x$, $\exists x$, $\forall y$, $\exists y$ и т. п., а не сами знаки $\forall$, $\exists$.)

Следует сказать также, что кванторы были изобретены не «для экономии времени», а для нужд математической логики и оснований математики, не имеющих с экономией времени ничего общего. (Кстати, первоначальные обозначения Фреге были таковы, что ни о какой экономии времени не могло быть и речи.) Сейчас кванторами нередко пользуются также при записи обычных математических предложений (например, определений предела последовательности, непрерывной функции и т. п. в курсах математического анализа) и в искусственных формализованных языках, создаваемых для надобностей лингвистики и информатики. Но и здесь они служат не для экономии времени, а для лучшей обозримости (и часто также для удобства перевода на «машинные» языки). Что же касается чтения знака $\forall$, то при использовании его по прямому назначению одинаково допустимо читать «для каждого», «для любого» и «для всякого», а также «каково бы ни было». Чтение «каждый», «любой», «всякий» без «для» невозможно. В обычном русском языке слова «любой» и «каждый» действительно не полностью синонимичны, но то же верно и для слов «каждый» и «всякий». Можно сказать, например, «я интересуюсь всякими курьезами», но нельзя — «я интересуюсь каждыми курьезами». Поэтому, если использовать знак $\forall$, как предлагает автор, в качестве простого сокращения, он должен обозначать только одно из этих слов.

А. В. Гладкий (Москва)

## О секрете происхождения арабских цифр

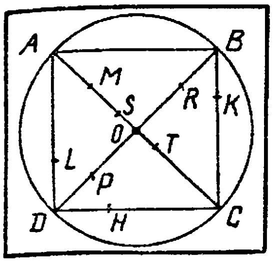
Широкому кругу читателей, вероятно, мало известна гипотеза о происхождении так называемых арабских цифр, которую в свое время высказал А. С. Пушкин. В этом году внимание к ней возрастает в связи с тем, что в июне этого года мы отметили 190 лет со дня рождения великого поэта. Учителям математики будет небезынтересно ознакомиться с предположением А. С. Пушкина, свидетельствующем о широте интересов Александра Сергеевича.

С описанной ниже гипотезой я познакомился еще в 1913 г., когда учился в гимназии. В те времена была широко распространена хорошая, но, к сожалению, ныне забытая традиция: дарить ученику ко дню его рождения однотомник произведений какого-нибудь из классиков русской литературы. Первоклассникам обычно дарили книгу Пушкина, второклассникам — Лермонтова, затем — книгу Гоголя и т. д. Эти прекрасно иллюстрированные сборники выпускало демократическое издательство И. Д. Сытина, стоили они сравнительно недорого.

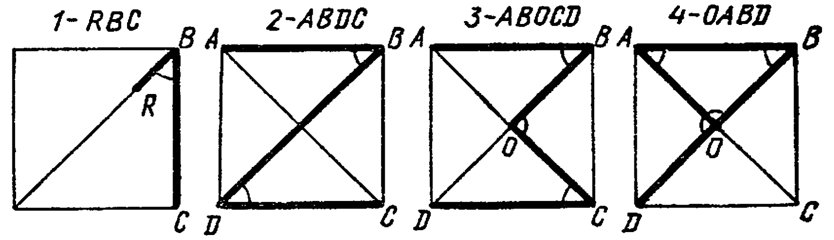
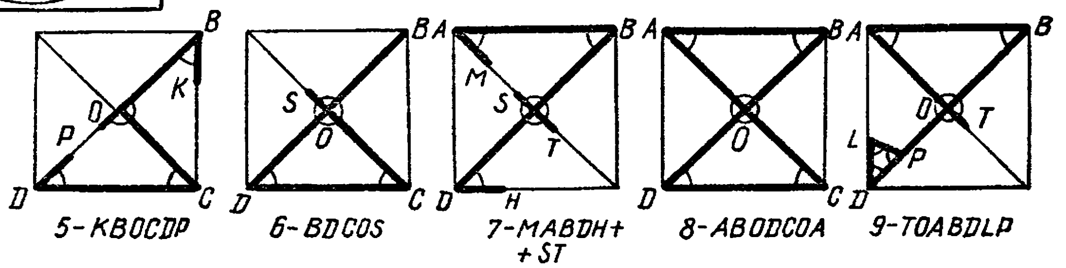
Как всякий обладатель долгожданной книги, я читал однотомник Пушкина, что называется, от корки до корки. Представьте же мое удивление, когда я увидел в этой книге геометрическую фигуру (см. рис. 1). Вершины квадрата были обозначены буквами. С помощью этих букв Александр Сергеевич разъяснял, как следует «набирать» эти буквы, чтобы получить начертание той или иной цифры (рис. 2). Например, цифра «2» образуется как маршрут *ABDC*, цифра «3» — *ABOCD* и т. д.[1] Разумеется, при написании современных цифр все острые углы сглаживаются, и фигуры приобретают округленный вид. Некоторые из них слегка даже поворачиваются, как это наблюдается с четверкой и пятеркой.

[1] Тот факт, что поэт связывал фигуру на рис. 1 с происхождением арабских цифр, подтверждается следующим изданием: *Пушкин А. С.* Полн. собр. соч.: В 16 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. По вопросу о цифрах: т. XII. С. 157 ("Table-talk").

▼ *Рис. 1*




▼ *Рис. 2*

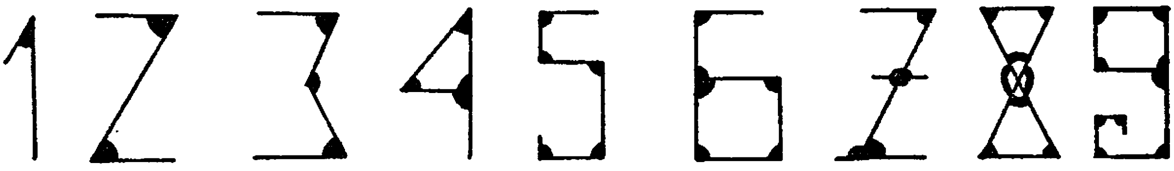




К сожалению, Александр Сергеевич не объяснил, так сказать, специализацию цифр. Почему, например, фигура *ABDC*, напоминающая латинскую букву Z, символизирует двойку, а не тройку, и наоборот? Почему фигура, составленная из двух равных треугольников с общей вершиной, соответствует цифре «8», а не «7» или «9»? Упрек этот справедлив. Объяснить принцип начертания цифр попытался директор Марокканского государственного музея истории Абделькри Боужибар (см.: Кунсткамера // Наука и жизнь. 1969. № 6. С. 158).

Идея Боужибара состоит в следующем: арабским цифрам в их первоначальном варианте было придано значение в строгом соответствии с числом углов, которые образуют иероглифы цифр. Так (рис. 3), иероглиф, изображающий цифру «1», образует о д и н угол, иероглиф «2» — д в а угла, «3» — т р и угла и т. д. Это, несомненно, остроумная и удачная догадка.

Но схема Боужибара не отвечает на вопрос о том, из какого общего источника взяты элементы, необходимые для построения всего ряда цифр. В противоположность этому схема Александра Сергеевича предусматривает, что «скелеты» фигур составлены только из треугольников и отрезков, соединяющих точки, лежащие на сторонах или на диагоналях квадрата. Эта схема автоматически удовлетворяет и принципу числа углов. В самом деле, на рис. 2 мы легко выделим нужное число углов в каждой из фигур, если будем учитывать только п р я м ы е или о с т р ы е углы, образованные утолщенной линией — контуром фигуры-иероглифа (принимаются во внимание как внутренние, так и внешние углы данной фигуры). Легко видеть, что на рис. 2 цифра «1» содержит один угол, цифра «2» —

*Рис. 3*



два угла и т. д. Интересно отметить, что для получения фигуры с семью углами пришлось прибегнуть к искусственному приему: перечеркнуть прямую линию короткой поперечной, образующей сразу четыре прямых угла. Такая палочка сохранилась в рукописной записи, но не применяется в печатном варианте семерки. Особую трудность представляла девятка: для «набора» фигуры из девяти углов пришлось дополнительно пристроить к концу косой линии маленький треугольник, который впоследствии превратился в крохотную спираль.

Изящно решается задача о нуле как о такой цифре, которая символизирует отсутствие какого бы то ни было значащего числа; для этого применена фигура, не имеющая никаких углов, т. е. окружность.

Таким образом, схема Александра Сергеевича является логически стройной.

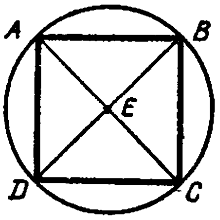
**В. А. Олевский** (Ленинград — Пушкин)

## А был ли секрет?

Статья В. А. Олевского поднимает очень интересный вопрос и одновременно свидетельствует о необходимости более широкого осведомления читателей с гипотезами, связанными с историей математики.

Отметим прежде всего, что в записках А. С. Пушкина сказано только следующее:

«Форма цифров арабских составлена из следующей фигуры




A|D (1), ABDC (2), ABECD (3), ABD+AE (4) etc.

Римские цифры составлены по тому же образцу».

Замечание «etc» (и так далее), касающееся остальных цифр «5»—«9» и «0», допускает различные толкования. Одно из них предложено В. А. Олевским в предыдущей заметке. Никаких дополнительных источников, свидетельствующих о точке зрения самого А. С. Пушкина на вопрос о происхождении этих цифр, обнаружить не удалось.

Напомним читателям о книге И. Я. Депмана «История арифметики: Пособие для учителей» (М.: Учпедгиз, 1959). В этой книге на с. 108 приводится та же самая цитата из записных книжек А. С. Пушкина. Далее сказано следующее: «Это замечание, как и все другие объяснения формы наших цифр, никакого исторического основания не имеет, что ясно видно из приложенной таблицы (фрагменты из таблиц И. Я. Депмана мы приводим ниже.— *Н. Л.*), дающей главные этапы эволюции наших цифр. Из нее же видно, что одни цифры очень давно приняли современный вид, 1, 2, 3, 8, 9, другие же сравнительно недавно. В начертаниях цифр 1, 2, 3 можно видеть их простейшие иероглифы — одну, две и три черточки». Отмеченная И. Я. Депманом неодновременность появления цифр наносит урон гипотезе об их происхождении из одного общего источника. Из таблицы на рис. 1 видно, что цифра, похожая на четверку, в Индии IX в. изображала число 5, шестерка — число 7 и т. д. Это обстоятельство вызывает сомнение относительно гипотезы, связывающей форму цифры с числом углов в ее начертании.

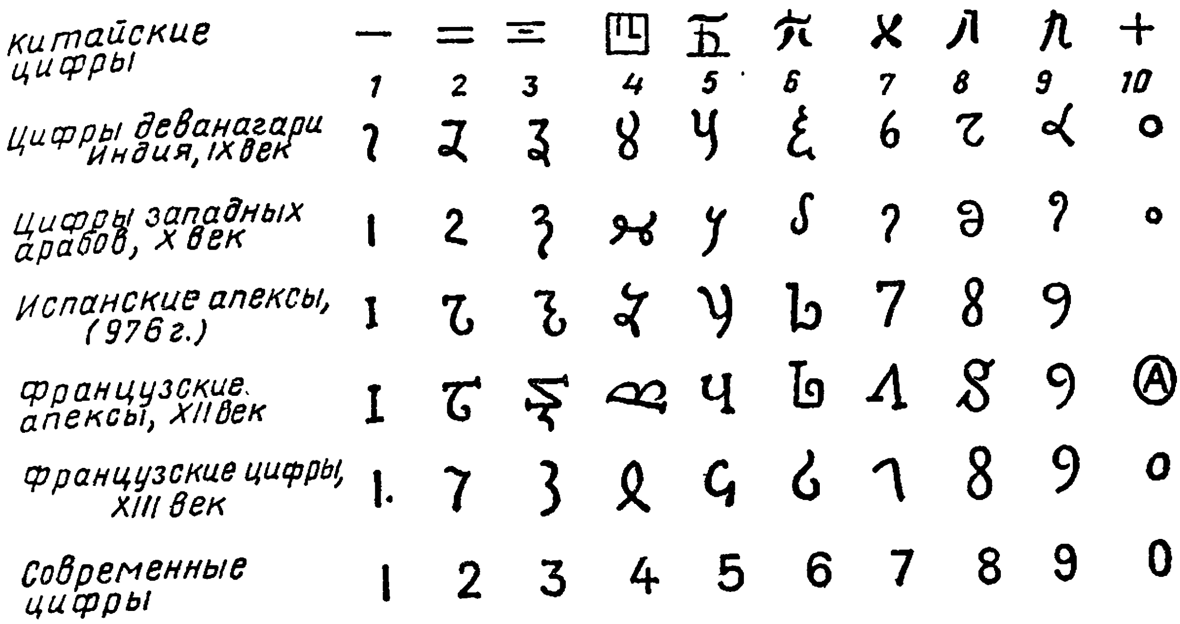



*Рис. 1*

В книге И. Я. Депмана приводится и сводная таблица, иллюстрирующая различные попытки объяснить происхождение формы цифр из некоторого одного источника.

Некоторые историки математики утверждают, что начертания цифр сложились под влиянием скорописи, которая стала возможной с появлением пергамента и бумаги. В отношении цифр 1, 2, 3 это особенно хорошо заметно. Попробуйте написать одну вертикальную, две или три горизонтальные черточки. Если вы будете писать быстро, то вам придется не отрывать карандаша от бумаги, и у вас получится нечто похожее на то, что изображено на рис. 2.

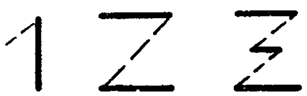


*Рис. 2*

Существуют разные версии относительно того, как появилась цифра 0. В Индии с древнейших времен сложилась поразрядная запись чисел. При отсутствии единиц какого-то разряда индийцы говорили «пусто», а место пустого разряда первоначально изображали точкой, которая вполне могла трансформироваться в начертание «0». Но существует и другая точка зрения: при переходе от непозиционной десятичной нумерации к позиционной индийские ученые испытали некоторое влияние со стороны древнегреческой астрономии. Греческие астрономы употребляли кружок для обозначения пустоты разряда в шестидесятеричных дробях. Систему шестидесятеричных дробей они заимствовали у вавилонян, которые применяли специальный знак  для обозначения пустоты шестидесятеричного разряда.

Статья В. А. Олевского интересна еще и тем, что помогает приоткрыть эволюцию взглядов на историю математики. Первоначально эти взгляды были романтизированы, т. е. на историю науки смотрели как на тайну, в которую можно проникнуть, вдохновясь какой-то идеей и развивая ее исключительно на основе логических построений. Из двух предположений о происхождении начертания арабских цифр, описанных в предыдущей статье, по крайней мере второе можно считать логически безупречным. Однако отсюда вовсе не следует, что так и было на самом деле. Культура вычислений развивалась главным образом вслед за развитием материальной культуры, а не из искусственных конструкций. В этом процессе задействовалась масса факторов и прежде всего — практическая необходимость и целесообразность. Спросим себя: было ли так уж необходимо древним вычислителям рассматривать квадрат, вписанный в круг, имея в виду выделение из этой фигуры иероглиф-цифру? Так ли уж важно для вычислителя, сколько углов в иероглифе-цифре? С чисто житейской точки зрения обе гипотезы кажутся абсолютно нереальными. Зато вполне вероятно, что некоторые цифры произошли от изображения предметов, ассоциировавшихся с конкретным числом. (Так, в римской цифре «V» угадывается стилизованный рисунок человеческой ладони с оттопыренным большим пальцем.) Это соображение согласуется с историей развития идеографического письма.

Интересно отметить, что А. С. Пушкин, по-видимому, вовсе не оценивал высказанную им гипотезу как бесспорную и не придавал ей такого серьезного значения, какое ей придал В. А. Олевский. В записных книжках поэта замечание, которое мы процитировали в начале данной заметки, стоит в рубрике «Table-talk», что переводится с английского как *застольная беседа.* О «тайне» начертания цифр можно было написать другу или поговорить в светском обществе. Но в печати поэт был осторожнее.

**Н. Леонидова** (Москва)

# Об отделе задач

В заметке Н. М. Рогановского «Наши предложения», опубликованной в № 4 журнала за 1988 г., идет речь о возможных способах усовершенствования журнала, высказанных слушателями факультета повышения квалификации (по кафедре методики преподавания математики) МГПИ им. В. И. Ленина. Не оспаривая всей массы читательских предложений, остановлюсь лишь на той части, которая затрагивает работу отдела задач журнала.

Сам я — многолетний (не менее 30 лет) читатель журнала. Разумеется, за эти годы у меня накопилось немало впечатлений как о работе журнала вообще, так и отдела задач в частности.

Должен сказать, что этот отдел, который вызвал такое неудовольствие автора заметки, на мой взгляд, является украшением журнала.

Руководителям отдела задач уже на протяжении ряда лет неизменно удается подбирать интересные по форме и глубоконаучные по содержанию задачи. То, что задачи этого раздела приводятся без всякой системы, может утверждать лишь тот, кто всерьез ими не интересовался. Не выдерживает критики и утверждение автора о том, что для решения этих задач недостаточно знать программу средней школы. Рассмотрим, например, решения задач из № 6 журнала за 1987 г., помещенных в № 4 за 1988 г. Только одна задача из 20 — № 3154 требует знания комплексных чисел. Но ведь знание этого материала — неотъемлемая часть математической культуры учителя математики!

«Подавляющее число учителей математики не решают их (задачи.— *Е. Г.*)»,— сетует автор. Это-то и прискорбно! Известно, насколько низка математическая культура нашего среднего учителя, который из математики едва ли в состоянии усвоить лишь одну методику. Но методика только ради методики — это обскурантизм, ложная цель; математика, не умеющего решать задачи и даже ими не интересующегося, просто нет, как бы он ни назывался. Многие мои товарищи, не будучи учителями, выписывают журнал «Математика в школе» только из-за отдела задач.

Если бы это зависело от меня, то я повышал бы зарплату учителям за то, что они работают над своим образованием, непрерывно совершенствуют свое математическое мастерство и опыт. Именно за это следует повышать зарплату учителю, а не за стаж. Удручающее и убогое впечатление производит учитель, имеющий 15 и более лет стажа, который не может решить ни одной нестандартной задачи.

И еще. Задачник «Кванта» не может заменить отдел задач в «Математике в школе», так как тематика задачника «Кванта» очень своеобразна и рассчитана на совершенно другой контингент — на сильных участников олимпиад, хорошо успевающих школьников.

**Е. М. Гольберг** (Ленинград)

## Ответ на публикацию

Мы благодарим авторов статьи «Задачник для факультативных и внеклассных занятий» (см.: Математика в школе. 1988. № 4) В. А. Кузнецову и О. П. Шарову за внимательное прочтение нашей книги и за выявление оставшихся незамеченными при работе над пособием неточностей и ошибок в текстах условий задач и в их решениях. При дальнейшей работе над текстом задачника все выявленные недочеты будут исправлены. Другие претензии авторов отзыва к сборнику, на наш взгляд, не имеют достаточных оснований.

Книга представляет собой задачник с подробными решениями, предназначенный для использования на внеклассных и факультативных занятиях, а не методическое пособие. Учитель волен распоряжаться материалами книги по своему усмотрению, в частности он может переформулировать условие задачи. Навязывать ему какие-либо рекомендации мы не считаем нужным, полагая достаточным распределение задач по тематике и по классам. Естественно считать, что учитель, готовясь к текущему занятию, сам отбирает нужные задачи, работает с их решениями, ориентируясь на известную только ему группу учащихся. Точка зрения, что такого рода работу следует регламентировать, справедливо признана неверной, вредной, сковывающей инициативу учителя даже на обычных уроках. Тем более такая позиция неприемлема, когда речь идет о занятиях факультатива или кружка.

**В. Н. Березин, Л. Ю. Березина, И. Л. Никольская** (Москва)

## КОМПЬЮТЕР НА УРОКЕ

# Квадратные уравнения и МК на математическом кружке

**В. С. Авраменко** (г. Елец)

С помощью микрокалькулятора (МК) квадратные уравнения можно изучать по крайней мере на год раньше, чем предусмотрено программой. Мы опробовали систему занятий по этой тематике на математическом кружке. Наличие МК позволяет проводить занятия на достаточно высоком научном уровне и вполне доступно для школьников.

Первый этап изучения квадратных уравнений на математическом кружке состоит в поиске его целых и дробных корней. Эта задача естественным образом связана с тематикой предыдущих классов и прежде всего с разложением натурального числа на простые множители, где применение МК особенно эффективно. Сведéние решения квадратного уравнения к поиску делителей натурального или целого числа обогащает представления учащихся о значимости теоремы, которую они применяют на интуитивном уровне — основной теоремы арифметики, традиционно использующейся в школе только для поиска наименьшего общего знаменателя дробей.

Немаловажно также, что учащиеся знакомятся (на частном примере квадратных уравнений) с важными моментами общей теории алгебраических уравнений с целыми коэффициентами: теоремой о целых корнях, представлением многочлена для вычислений по схеме Горнера, которая наиболее удобна для вычислений на МК, методом Руффини — Горнера, сводящим поиск дробных корней к поиску целых корней методом неопределенных коэффициентов.

На содержании первого этапа мы остановимся подробно.

Изучение темы целесообразно начать с простой задачи практического содержания.

Задача 1. *К квадратному участку с земляникой садовод прирезал полоску земли длиной 4 м, после чего площадь полученного прямоугольного участка составила 60 м². Найти размеры нового участка.*

Логика решения совершенно прозрачна, и учащиеся сразу же приходят к квадратному уравнению $x(x+4)=60$. Для его решения приходится обратиться к активно использовавшемуся еще в начальной школе экспериментальному способу рассуждений — подбору корней. Подбором учащиеся легко находят корень $x=6$.

Теперь учитель напоминает, что решить уравнение — значит найти все его корни. Самостоятельно провести нужные рассуждения ребята еще не могут, поэтому учитель подсказывает: «А что будет, если ширина участка будет больше 6?»

Учащиеся коллективно приходят к нужному рассуждению: если ширина участка больше 6 м, то длина больше 10 м, а его площадь больше 60 м$^2$. Ясно, что для окончания решения следует еще рассмотреть случай $x<6$. Чаще всего этот момент вынужден подсказать учитель. Но тогда уже учащиеся сами говорят, что в этом случае «все точно так же, только наоборот», имея в виду, что $-10(-10+$ $+4)=60$.

На этом примере, по существу, закладывается умение решать уравнения методом подбора, которым, как известно, не владеют даже большинство выпускников школы, что впоследствии оборачивается психологическими трудностями. Например, студенты с трудом воспринимают схему решения дифференциального уравнения, при которой «с потолка» берутся решения, а затем используется теорема единственности.

Заметим еще, что в процессе решения не следует пока ставить перед учащимися вопрос, почему они ищут целые корни уравнения, которых может и не быть. Такое умолчание соответствует обычной математической практике — сначала, при отсутствии общего метода, исследуются самые простые возможности.

В процессе решения задачи 1 происходит переакцентировка учащихся с цели задачи (нахождение размеров участка) на способ ее решения (подбор корней), что позволяет предложить далее бесфабульную, чисто математическую задачу.

Задача 2. *Решить уравнение* $x(x+5)=1716$.

Подбор корня требует вычислений с двузначными числами, поэтому ребята, естественно, прибегают к помощи МК.

Как правило, учащиеся не обладают хорошими навыками прикидки, их пробы обычно бессистемны, а число их довольно велико. Но постепенно ребята приходят к выводу, что для решения уравнения надо разложить 1716 на два множителя и достаточно испытать только делители этого числа. Оно имеет много делителей, поэтому на основе признаков делимости и с помощью МК раскладывается на множители очень быстро:

$$1716=4\cdot 429=4\cdot 3\cdot 143=4\cdot 3\cdot 11\cdot 13.$$

Комбинируя различные множители, учащиеся находят корень уравнения $x=39$. (Заметим, что этот поиск нужного разложения числа 1716 на два множителя требует определенных, хотя и элементарных, комбинаторных умений.) В результате учащиеся приходят, по существу, к теореме о том, что целый корень квадратного уравнения (с целыми коэффициентами) надо искать среди делителей свободного члена, и этот прием становится в дальнейшем основным. В сочетании с прикидкой он приводит к экономному решению многих уравнений.

Далее снова возникает вопрос о поиске других корней. Обычно учащиеся пытаются провести рассуждение, аналогичное тому, которое применялось при решении задачи 1, рассматривая неравенства: $x>39$ и $x<39$. Тогда учитель приводит пример нарушения неравенства при перемножении неравенств с отрицательными членами, поясняя при этом, что не всякое уравнение возникает из практической задачи, где искомое неизвестное обычно положительно.

Предыдущие усилия учащихся, однако, не зачеркиваются, поскольку их рассуждения доказывают, что уравнение имеет только один положительный корень. Остается найти его отрицательные корни. Здесь, в первую очередь, возникает идея последовательного перебора целых, а не только натуральных делителей числа 1716. Обычно учащиеся без труда находят нужное разложение $1716=(-39)(-44)$, т. е. $x=-44$.

Однако при таком быстром подборе учитель снова вынужден поставить вопрос о наличии других корней, который в принципе можно решить полным перебором всех возможностей. В то же время, несмотря на наличие МК, этот прием требует большой работы: число 1716 имеет 24 делителя, так что требуется, в принципе, 12 проверок. При таком подходе есть риск что-то упустить, не достичь полноты перебора...

В этом месте учитель получает возможность рассказать о другом, более быстром пути ответа на вопрос о числе корней квадратного уравнения. Дальнейшие объяснения можно построить по образцу любого из двух предлагаемых вариантов.

В I варианте учитель просто доказывает теорему о том, что квадратное уравнение не может иметь трех различных корней. Это делается, по существу, с помощью доказательства первой части теоремы Виета. Пусть $a$ и $b$ — различные корни уравнения $x^2+px+q=0$. Тогда $a^2+pa+q=0$, $b^2+pb+q=0$ и $a^2+pa=b^2+pb$. Отсюда после преобразований получаем: $(a+b+p)(a-b)=0$. По условию $a\neq b$. Тогда $a+b=-p$ (первая часть теоремы Виета). Но если $c$ — третий корень уравнения, то точно так же можем получить, что $a+c=-p$, откуда $b=c$.

Заметим, что отсюда легко получается и вторая часть теоремы Виета: $ab=a(-p-a)=-a^2-ap=q$.

Это объяснение требует достаточно хороших навыков тождественных преобразований и поэтому может оказаться неосуществимым, если на уроке нужный материал еще не изучен.

В кружке с относительно слабым составом более оправдан II вариант рассуждений. Если $x$ — отрицательный корень уравнения, то $x=-y$, где $y$ — число положительное и $-y$ является корнем уравнения. Это означает, что $(-y)(-y+5)=1716$, т. е. $y(y-5)=1716$. Положительный корень этого уравнения находится известным способом, $y=44$, так что $x=-44$. Уравнение полностью решено.

В кружке сильного состава целесообразно, на наш взгляд, продемонстрировать оба варианта рассуждений, поскольку I вариант радикально облегчает дальнейшую работу.

Отметим, впрочем, что во II варианте подбор положительного корня следует, строго говоря, провести более аккуратно, убедившись сначала, что он больше 5. Однако в данном случае целесообразно не вскрывать нового логического момента — ему еще найдется место. Основное достоинство II варианта — это замена переменной, новая для учащихся идея, общематематическая ценность которой не нуждается в обсуждении. Однако при выборе этого варианта необходимо постоянно изобретать специальные приемы доказательства отсутствия третьего корня при уже найденных двух корнях квадратного уравнения. При этом к соответствующему утверждению учащиеся приходят постепенно, эмпирически. В этом возрасте их мало смущает отсутствие логического обоснования используемых утверждений.

Наличие МК становится совершенно обязательным при переходе к задачам с более сложными коэффициентами, где техника вычислений на этих приборах уже приобретает особую роль.

Задача 3. *Иванов задумал натуральное число, умножил его на* 6, *вычел* 11 *результат умножил на задуманное число и сообщил ответ* : 3770. *Какое число он задумал?*

Эта задача легко сводится к уравнению $(6x-11)x=3770$. Воспользуемся сначала прикидкой. Поскольку $3770=2\cdot5\cdot377=$ $=2\cdot5\cdot13\cdot29$ и для любого натурального $x\geqslant2$ $(6x-11)x\approx6x^2$, ясно, что $6x^2\approx3770$, $x^2\approx628$. При положительном $x$ имеем $x\approx25$. Значит, испытать нужно прежде всего числа, близкие к 25, из которых делителем числа 3770 является 26. Проверка показывает, что $x=26$ действительно корень данного уравнения. Рассуждая так же, как и при решении задачи 1, убеждаемся, что других натуральных корней уравнение не имеет.

Рассмотрение методов нахождения целых корней квадратных уравнений заканчивается анализом уравнений вида $x(a+bx)=c$, где числа $a$ и $b$ имеют разные знаки. Для таких уравнений вопрос о количестве корней уже более сложен, поэтому, если теорема о числе корней неизвестна, остается только воспользоваться перебором делителей числа $c$.

Задача о дробных корнях уравнения $ax^2+bx+c=0$ решается с помощью домножения его на число $a$ и замены $y=ax$. После этого остается найти целые корни уравнения $y^2+by+ac=0$. Это и есть так называемый метод Руффини—Горнера, применяемый в теории многочленов. В данном случае учащиеся довольно быстро замечают, как можно сократить вычисления: вместо того, чтобы решать уравнение $ax^2+bx+c=0$, нужно сразу же искать целые корни уравнения $y(y+b)=-ac$. Несомненным достоинством этого метода является то, что он иллюстрирует общематематический прием «сведéния задачи к предыдущей».

Теперь наступает важный момент: следует показать, что квадратное уравнение может и не иметь рациональных корней. Этот момент позволяет поставить вопрос о приближенном вычислении корней, и тогда МК начинает использоваться уже как совершенно необходимое средство.

Рассмотрение соответствующих методов можно начать с задачи 1 о садовом участке, заменив в условии число 60 числом 70, т. е. с решения уравнения $x(x+4)=70$. В этом случае вполне естественно найти размеры участка с точностью до 0,1 м. Учащиеся сразу убеждаются, что корень $x_0$ удовлетворяет условию $6<x_0<7$. Далее они делают прикидку: $6(6+4)=60$ и $7(7+4)=77$. Ясно, что 77 ближе к 70, чем 60, значит, искомое приближение корня $x_0$ ближе к 7, чем к 6. При этом, по существу, используется естественное интуитивное представление человека о непрерывности: чем точнее приближение аргумента, тем точнее приближение функции.

Важно отметить, что каждый учащийся самостоятельно испытывает конкретные приближения и к требуемому результату ребята приходят в разное время. Им приходится сравнивать «степень близости» получающихся чисел, выполнять устные вычисления, отбрасывать «лишние» цифры, т. е. применять практические навыки приближенных вычислений. В процессе этой работы учащиеся заметно активизируются, между ними возникают споры, здоровое соревнование, во время которого вырабатываются подходы к вычислительной деятельности.

После того как приближение корня с точностью до 0,1 найдено, продолжается поиск приближений с бóльшей точностью. Он не требует никаких новых соображений принципиального характера, однако техника вычислений должна быть достаточно высока. Она постепенно и развивается: у учащихся заметно снижается число чисто технических ошибок, ребята учатся запоминать каждое проверяемое значение переменной $x$, у них вырабатывается глубокое понимание возможности вычислить корень уравнения с точностью, предусмотренной на данном МК. Такое понимание легко подводит к мысли о том, что процесс приближений можно в принципе продолжать сколь угодно долго, до бесконечности, т. е. приводит к идее действительного числа как бесконечной десятичной дроби. Для формирования этой идеи оперирование с МК значительно более эффективно, чем теоретическое рассуждение.

Непосредственно перед переходом к получению общей формулы корней квадратного уравнения целесообразно рассмотреть еще два вопроса.

Во-первых, следует решить два кубических уравнения вида $x^3+ax=b$, одно из которых имеет, а другое не имеет целых корней. При этом коэффициент $a$ следует взять положительным, чтобы избежать обсуждения сложного в данном случае вопроса о количестве корней. Эти примеры практически ничем не отличаются от предыдущих, но преследуют важные воспитательные цели. Они расширяют представления учащихся о возможностях применения вычислительных методов, показывая, что тип уравнения с вычислительной точки зрения может и не играть большой роли для его решения. Это очень важно! После того, как учащиеся познакомятся с формулой корней квадратного уравнения, у них не должно сложиться впечатление, что до этого они занимались лишней работой, напрасно тратили силы. Дополнительно учитель может сообщить, что в школе кубические уравнения (при наличии «хороших» корней) сводятся к квадратным, а формулы корней этих уравнений весьма сложны. Здесь уместно также рассказать об истории поиска формул корней алгебраических уравнений. На эту тему одним из учащихся может быть подготовлен доклад.

Во-вторых, целесообразно рассмотреть квадратное уравнение с иррациональными корнями. Например: $x^2-2x-1=0$. Полезно также найти корни этого уравнения с большой точностью: $x_1 \approx 2{,}4142135$, $x_2 \approx -0{,}4142135$.

Это можно сделать на специальной лабораторной работе, где одни учащиеся ищут положительный, а другие — отрицательный корень.

Результаты лабораторной работы должны стать материалом, на котором отрабатывается важный метод — выделение полного квадрата — и одновременно уточняются сведения о работе МК. Прежде всего учитель может предложить ребятам определить с помощью МК, чему равно выражение $(x_1-1)^2$ или $(x_2-1)^2$. Проведя вычисления, ребята обнаружат на дисплеях своих МК интересное число 1,9999999. Учащиеся непременно заподозрят, что МК, считающий не абсолютно точно, здесь допускает ошибку (ошибку приближения), а в действительности $(x_1-1)^2=2$.

Эту гипотезу следует немедленно проверить:

$$(x_1-1)^2=(x_1-1)(x_1-1)=x_1^2-x_1-x_1+1=$$
$$=x_1^2-2x_1+1=x_1^2-2x_1-1+2=2,$$

так как $x_1^2-2x_1-1=0$.

Предложенный способ проверки гипотезы открывает путь к получению общей формулы корней: если значения $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют уравнению $(x-1)^2=2$, которое после преобразований принимает вид исходного уравнения $x^2-2x-1=0$, то, значит, должен существовать и способ проведения «обратного» преобразования. Остается «открыть» этот способ.

Для этого вполне уместным представляется метод неопределенных коэффициентов, логика которого на фоне предыдущего примера оказывается естественной: надо от $x$ *что-то* отнять, затем возвести в квадрат и прибавить или вычесть таким образом, чтобы получить исходное уравнение.

Дальнейшие пояснения лучше всего проводить на конкретном примере. Пусть дан трехчлен $x^2-4x-7$. Обозначив неизвестные *что-то* через $a$ и $b$, учащиеся приходят к равенству $x^2-4x-7=$ $=(x-a)^2-b$, или

$$x^2-4x-7=x^2-2ax+a^2-b.$$

Естественно, что учащиеся еще не задумываются над вопросом о единственности записи квадратного трехчлена в стандартном виде, поэтому они сразу же догадываются, как получить нужное равенство: надо выбрать $a$ и $b$ таким образом, чтобы $-4=-2a$, $-7=a^2-b$, откуда $a=2$, $b=11$.

Обратим внимание на логику, лежащую в основе рассуждений учащихся. Интуиция ведет их здесь по эффективному и логически правильному пути. В самом деле, для решения задачи достаточно найти хотя бы одну пару значений $a$ и $b$, для которых требуемое равенство выполняется, и поэтому вопрос о единственности этой пары не возникает. Кроме того, находя значения $a$ и $b$, учащиеся вовсе не решают систему двух уравнений с двумя неизвестными — этих понятий у них еще может и не быть. Ребята действуют эмпирически, и используемая эмпирика может служить пропедевтикой метода подстановки при решении систем.

Уравнение $(x-2)^2-3=0$ решается, естественно, без разложения на множители, с помощью понятия квадратного корня: $(x-2)^2=3$, $x-2=\sqrt{3}$ или $x-2=-\sqrt{3}$, т. е. $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$.

Далее целесообразно рассмотреть уравнение с числовыми коэффициентами, не имеющее корней, затем получить формулу корней приведенного квадратного уравнения и, наконец, формулу корней квадратного уравнения общего вида.

В этой статье мы полностью оставили в стороне возможности решения уравнений методом итераций. По структуре деятельности этот метод не только не является более сложным по сравнению с рассмотренным выше, но в определенной степени даже более прост, поскольку состоит в монотонном выполнении одних и тех же операций.

Однако обоснование метода итераций требует серьезной теории. К тому же он более полезен для учащихся старших классов: необходимость выполнения некоторой последовательности одинаковых операций ведет к идее автоматизации этих операций с помощью компьютеров. Поэтому метод итераций целесообразно рассматривать в старших классах в рамках межпредметных связей математики и информатики.

Мы вовсе не считаем, что участники математического кружка, занимающиеся по предлагаемой программе, усвоят раз и навсегда рассмотренные методы и идеи. Ребята пока только прикоснулись к этим вопросам. Их освоение — процесс длительный. Мы уверены, что многие математические идеи и понятия должны возникать в практике учащихся еще до того, как они станут предметом специального изучения в курсе математики на теоретическом уровне.

## Компьютер и наглядность

**Ш. Ж. Асылбеков (г. Жанатас)**

Компьютер позволяет провести на уроке вычислительный эксперимент. Целевая вычислительная работа, для которой вполне пригодны самые доступные виды компьютеров — микрокалькуляторы, способствует мотивации урока, обогащает наглядно-индуктивный метод, позволяет вести урок, выдвигая и проверяя гипотезы.

Приведем примеры применения МК для проверки сходимости некоторых последовательностей, рассматриваемых в школьном курсе математики.

1. Одними из первых в школе встречаются последовательности периметров правильных вписанных (и описанных) многоугольников. На наглядных геометрических чертежах учащимся разъясняется, что с увеличением числа сторон у вписанных и описанных многоугольников их границы приближаются к окружности, а периметры все менее отличаются друг от друга. На интуитивном представлении о том, что эти периметры «в конце концов» (т. е. в пределе) должны стать равными друг другу, основан классический вывод формулы для вычисления длины окружности, который вполне может быть рассмотрен на

кружках и факультативах. Это яркий пример реализации наглядно-индуктивного метода, который станет еще более убедительным, если будет основываться не только на геометрической интуиции, но и на вычислениях. Интуитивные рассуждения некоторым учащимся могут казаться сомнительными. Колебания таких учащихся будут преодолены объективностью подсчетов на МК.

Для простоты вычислений удобнее всего рассмотреть единичную окружность. Тогда периметр $P'_n$ правильного описанного многоугольника вычисляется по формуле $P'_n=2n\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$, а правильного вписанного многоугольника — по формуле $P_n=2n\times\sin\frac{180°}{n}$. Будем постепенно удваивать число сторон многоугольников начиная с шестиугольника. В табл. 1 запишем результаты подсчета периметров. Для краткости члены последовательности представим через один (т. е. только стоящие на нечетных местах), начиная с шестиугольника и кончая 6144-угольником.

Если учащиеся ознакомлены с понятием предела и основными теоремами о пределах последовательностей, то вывод формулы длины окружности можно провести на более высоком уровне. Для этого «компьютерную» наглядность опять следует сочетать с геометрической, установив по табл. 1 и по чертежам, что последовательность $(P_n)$

Таблица 1

| $n$ | $P'_n$ | $P_n$ | $P'_n-P_n$ |
|---|---|---|---|
| 6 | 6,9282032 | 6,0000000 | 0,9282032 |
| 24 | 6,3193198 | 6,2652572 | 0,0540626 |
| 96 | 6,2854291 | 6,2820639 | 0,0033652 |
| 384 | 6,2833254 | 6,2831152 | 0,0002102 |
| 1536 | 6,2831940 | 6,2831809 | 0,0000131 |
| 6144 | 6,2831858 | 6,2831850 | 0,0000008 |

возрастает и ограничена сверху периметром любого описанного многоугольника. Значит, по теореме Вейерштрасса, существует предел $C$ этой последовательности. Аналогично, и для убывающей последовательности $(P'_n)$, которая ограничена снизу, существует предел $C'$. Теперь снова есть смысл сослаться на вычисления. Из табл. 1 видно, что разность $(P'_n-P_n)$ стремится к нулю, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} P'_n-\lim\limits_{n\to\infty} P_n=0$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} P'_n=\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, т. е. $C'=C$. Это и есть длина окружности.

2. При изучении темы «Производные тригонометрических функций» приходится рассматривать предел отношения $\sin x/x$. С геометрической точки зрения этот вопрос сводится к нахождению предела отношения длины хорды единичной окружности к длине стягиваемой ею дуги. Но $P_n\approx C$ (см. п. 1). Значит, длина стороны правильного $n$-угольника, вписанного в единичную окружность ($2\sin x$), приближенно равна длине

дуги ($2x$), которую эта сторона стягивает, т. е. $\sin x/x$ стремится к 1 при $x$, стремящемся к 0.

Такой вывод будет более убедительным, если подкрепить его вычислениями. После вычислений на МК-41 получаем результаты, показанные в табл. 2.

Таблица 2

| $x$ (рад) | $\sin x/x$ |
|---|---|
| 0,5 | 0,958851077 |
| 0,05 | 0,999583385 |
| 0,005 | 0,999995833 |
| 0,0005 | 0,999999958 |
| 0,00005 | 1,000000000 |

Таблица 3

| $\Delta x$ | $(e^{\Delta x}-1)/\Delta x$ |
|---|---|
| 0,5 | 1,297442541 |
| 0,05 | 1,025421927 |
| 0,005 | 1,002504170 |
| 0,0005 | 1,000250020 |
| 0,0001 | 1,000049900 |

3. Вывод формулы производной показательной функции связан с вычислением предела: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$. Здесь опять в полной мере опираются на геометрическую интуицию учащихся, устанавливая, что этот предел равен 1. Мы не приводим соответствующих рассуждений. Отметим только, что в них опора на наглядность намного очевиднее, чем в п. 1 и 2. К тому же учащиеся, рассматривающие этот предел, старше тех, о ком шла речь в предыдущих пунктах заметки. Они способны четче уловить разницу между наглядным пояснением и логическим доказательством. Тем более необходимо подкрепить интуитивные выводы вычислительным экспериментом, один из вариантов которого дан в табл. 3.

## КОНКУРСНЫЕ УЧЕБНИКИ

**От редакции. На конкурсе учебников математики для общеобразовательной школы, состоявшемся в 1987—1988 гг., второе место среди учебников геометрии заняла рукопись академика АН СССР А. В. Погорелова (см.: Математика в школе. 1988. № 5. С. 49—50), написанная на основе действующего учебника «Геометрия 6—10».**

**Этот учебник выйдет из печати в 1990 г. и будет использоваться в качестве альтернативного учебникам Л. С. Атанасяна и других, о которых журнал уже подробно рассказывал (см.: Математика в школе. 1989. № 1. С. 95—109).**

**Ниже в своей статье А. В. Погорелов знакомит учителей с тем, каких принципов он придерживался при переработке учебника и какие изменения в него внес.**

# Об учебнике «Геометрия 7—11»

Предлагаемый учебник по геометрии представляет собой существенную переработку действующего учебника «Геометрия 6—10» как в научном, так и в методическом плане.

## 1. Структура учебника

Текст учебника разбит на параграфы, а параграфы — на пункты, имеющие сквозную нумерацию. Каждый параграф представляет собой большую тему, рассчитанную в среднем на одну учебную четверть. Текст одного пункта занимает не более одной страницы и рассчитан для изложения на одном уроке. Материал пункта в общем случае содержит определение нового понятия, теорему, связанную с этим понятием, и задачу с решением.

Некоторые пункты содержат только введение нового понятия и теорему, другие — только теорему и задачу. В отдельных пунктах решается только задача. Обычно это задача, которая в прошлом относилась к теоретической части курса, например вывод формулы Герона для площади треугольника или вывод формулы для объема усеченной пирамиды.

Разбивка текста учебника на пункты, по существу, дает почасовую разбивку материала. Общее число пунктов в учебнике меньше числа часов, отводимых на изучение предмета, и составляет 60 % общего числа часов. Это соотношение между числом пунктов и числом часов, отводимых на предмет, выдерживается по годам и классам. Предполагается, что остальные часы используются учителем для решения задач с его участием, для контроля успеваемости учащихся и других форм работы.

В конце каждого параграфа имеется пространный список вопросов на повторение пройденного материала, охватывающий определяемые в этом параграфе новые понятия, доказанные теоремы и их следствия.

Каждый параграф завершается списком задач по материалу данного параграфа. Задачи располагаются в порядке изучения теории и охватывают все основные случаи использования материала параграфа при решении задач.

## 2. Научный уровень учебника

Научный уровень данного учебника определяется прежде всего последовательно выдержанным дедуктивным изложением, опирающимся на аксиоматику автора. Однако, в отличие от действующего учебника, изложение доказательств ведется как бы на наглядном уровне, с очень ограниченным числом аргументов, которые и составляют содержание принятых аксиом. Такой способ изложения по существу сохраняет высокий научный уровень учебника, а по форме отличается от традиционного изложения предмета только тем, что наглядные аргументы доказательств весьма ограничены и фиксированы.

Поясним эту мысль. В действующем учебнике можно встретить выражение: «по аксиоме I существуют точки, не лежащие на данной прямой. Обозначим одну из них...». В переработанном учебнике сказано просто — «отметим точку, не лежащую на данной прямой...». В действующем учебнике: «согласно аксиоме III из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими. Следовательно...». Теперь этот аргумент подан наглядно — «так как из трех точек на прямой одна лежит между двумя другими, то...». В действующем учебнике: «согласно аксиоме VII существует треугольник, равный данному, у которого...». Теперь мы говорим просто — «возьмем треугольник *ABC*, равный данному, так чтобы...». Такого сорта построения и аргументы сплошь и рядом можно встретить в традиционных учебниках прошлых лет, например в учебнике А. П. Киселева. Поэтому доказательства теорем в данном учебнике по простоте и наглядности не уступают традиционным.

Однако указанная форма наглядного изложения вовсе не означает отказ от аксиоматического построения курса. Напротив, в специальном п. 13 подчеркивается, что наше доказательство действительно опирается на аксиомы и доказанные ранее теоремы. В этом пункте повторяется доказательство первого признака равенства треугольников, данное в предыдущем пункте, с указанием аксиом, которые были использованы в виде наглядных соображений.

Наша система наглядно-аксиоматического построения курса оказалась возможной благодаря принятой аксиоматике. В ней каждая аксиома проста и наглядна, более того, хорошо известна учащемуся еще до систематического изучения предмета.

Наглядно-аксиоматическое изложение позволяет предусмотренную программой беседу учителя об аксиоматическом построении предмета сделать содержательной, понятной и полезной учащимся.

Система наглядно-аксиоматического изложения является, безусловно, шагом вперед в повышении научного уровня преподавания, которое требуется программой.

Высокий научный уровень изложения предмета в учебнике достигается еще введением в курс нетрадиционных тем: «Координаты», «Векторы» и «Преобразования фигур». В результате оказалось возможным дать простые, наглядные, современные определения многих понятий, которые в традиционном изложении были описательными, трудно воспроизводимыми, а в ряде случаев и недостаточно корректными. Доказательства с использованием материала указанных нетрадиционных тем современны, просты и наглядны. Резюмируя изложенное выше, можно утверждать, что научный уровень данного учебника удовлетворяет современным требованиям.

### 3. Доступность изложения

Доступность изложения в том или ином учебнике может быть доказана только на опыте, в ходе преподавания по этому учебнику. Изложение предмета в учебнике А. П. Киселева было доступно. Это факт, установленный опытом преподавания в течение многих десятилетий. В связи с этим учебник, который находится на таком же уровне изложения, надо считать тоже доступным.

Наглядно-аксиоматическое изложение предмета в данном учебнике по форме в большинстве случаев не отличается от традиционного изложения, как в учебнике А. П. Киселева, поэтому должно считаться доступным. Что касается отдельных вопросов, которые были предметом критики действующего учебника, то в их изложение внесены соответствующие коррективы в сторону сближения с традиционным изложением. В отдельном пункте мы перечислим основные изменения в переработанном учебнике по сравнению с действующим.

В связи с вопросом о доступности изложения отметим еще, что задачный материал учебника в основном состоит из задач, заимствованных из хорошо зарекомендовавших себя учебников и задачников прошлых лет, особенно из учебника А. П. Киселева и сборника задач Н. Н. Рыбкина. Доступность этих задач не вызывает сомнений.

### 4. Обеспечение знаний и умений

Знания предмета в объеме, предусмотренном программой, обеспечиваются прежде всего системой изложения и ее доступностью. Разумеется, эти знания будут получены при условии упорного труда учащегося и добросовестного отношения учителя к своим обязанностям. В этой связи в начале VII класса имеется специальный пункт (п. 19) с интригующим названием: «Что надо делать, чтобы хорошо успевать по геометрии». На поставленный вопрос дается очень простой ответ. Именно, надо знать основные результаты из пройденного материала. А для этого надо время от времени повторять пройденный материал по контрольным вопросам. Эти вопросы служат учащимся для самоконтроля. Ими должны пользоваться учитель и родители, контролируя состояние знаний учащегося. Контрольные вопросы являются важным средством обеспечения знаний.

Говоря об умениях, имеют в виду умение доказывать теоремы и решать задачи. Определенного рецепта, как решать задачи и как доказывать теоремы, дать нельзя. Единственное, что можно здесь рекомендовать,— это смотреть, как доказываются теоремы в учебнике, как решаются вынесенные в текст задачи. В связи с этим в каждом пункте учебника имеется задача с решением, которая связана с определяемым в этом пункте понятием или доказанной теоремой. На этих задачах, которые разбираются учителем или с его помощью, учащийся должен научиться и способу рассуждения, и выполнению чертежа, и, наконец, записи решения. Таким образом, важным фактором обеспечения умений являются задачи с решениями в тексте учебника.

Но недостаточно только смотреть, как другие решают или доказывают. Дальше учащемуся надо самому решать и доказывать, пользуясь теми же методами и приемами, что и в иллюстрирующих примерах. Для этого предложены задачи в конце каждого параграфа. Задачи средней трудности и при известной настойчивости и упорстве должны решаться учащимися. Общее число задач невелико: в среднем 3—4 в расчете на один урок. Можно сказать, что учащийся достигает умения решать задачи в объеме школьной программы, если он перерешает все (или почти все) задачи из учебника. Решение задач, помещенных в учебнике, является основным средством приобретения знаний и умений.

Обеспечение знаний и умений — основа дальнейшего развития умственных способностей учащегося, его личности.

### 5. Сравнение переработанного учебника с действующим учебником «Геометрия 6—10»

Как указано выше, описываемый учебник представляет собой научно-методическую переработку действующего учебника. Эта переработка связана в известной степени с критическими замечаниями в адрес действующего учебника со стороны учителей-практиков, методистов, специалистов-математиков, а также требованиями и пожеланиями, содержащимися в объясннтельной записке к программе по геометрии. Приведем основные изменения, которые отличают данный учебник от ныне действующего, а также укажем причины, которые побудили к этим изменениям.

Во-первых, многие критические замечания относились к форме аксиоматического изложения предмета. Это замечание принято. И в связи с этим в данном учебнике реализована наглядно-аксиоматическая форма изложения, о которой шла речь в п. 2.

Многие учителя отдают предпочтение традиционному изложению признака параллельности прямых по углам с секущей и доказательству теоремы о сумме углов треугольника. Пожелание удовлетворено. Недостающие аргументы доказательства даны в задачах предшествующего им текста.

Учителя-практики считают целесообразным с целью разгрузки материала VII класса перенести изложение вопроса об углах, вписанных в окружность, в IX класс. Пожелание учтено. Вопрос в том же изложении дан в связи с доказательством теорем о пропорциональных отрезках хорд и секущих окружности.

Некоторые учителя считают, что задачи на построение должны быть не только в параграфе, посвященном геометрическим построениям, но и по всему курсу. Пожелание принято. В данном учебнике такие задачи можно встретить и в других параграфах.

Некоторые учителя жалуются на плохую воспроизводимость учащимися доказательства теоремы о косинусе угла. В связи с этим трудная часть доказательства вынесена в конец предыдущего параграфа, к теореме Фалеса в виде теоремы о пропорциональных отрезках, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми. Кроме того, в доказательстве этой теоремы выделена как обязательная ее традиционная часть, относящаяся к случаю соизмеримых отрезков. Общий случай предлагается в ознакомительном плане.

Некоторые учителя находят сложным решение вопроса о взаимном расположении окружностей с помощью координат. Теперь вопрос о взаимном расположении окружностей перенесен в задачу, которая расчленена на простые части, легко решаемые чисто синтетическими средствами, без использования координат.

В связи с просьбой учителей проведена мелкая разбивка текста учебника на пункты с часовой нагрузкой каждого пункта.

По предложению учителей (и требованию программы) тема «Подобие фигур» перенесена с последней четверти VIII класса на первую четверть IX. Соответственно тема «Векторы» из IX класса перенесена в VIII.

По предложению специалистов-математиков выделены в отдельные пункты вопросы о подобии и о равенстве правильных многоугольников, а по предложению учителей — построение правильных многоугольников.

По просьбе учителей в специальном пункте рассмотрен вопрос об изображении основных изучаемых тел и построении сечений различными плоскостями.

По просьбе учителей даны простые, легковоспроизводимые и наглядные определения геометрических тел — призмы и цилиндра. В отдельном пункте дано для сведения общее определение геометрического тела — как замкнутой области в пространстве.

По замечанию специалистов-математиков внесены соответствующие изменения в формулировки плоских аксиом как аксиом стереометрии. По их же требованию приводится для сведения теорема о разбиении пространства плоскостью на два полупространства.

Приведенные примеры далеко не исчерпывают всех изменений, которые были внесены в данный учебник. Имеется масса мелких изменений, упрощающих изложение предмета.

### 6. Учебник и учитель

Предлагаемый учебник адресован прежде всего учащимся. Для учителя текст пункта учебника — это тезис, который должен быть воспроизведен в ходе урока без изменений, но соответствующим образом дополненный. Это дополнение каждый учитель делает по своему усмотрению. Чтобы не стеснять инициативу учителя, этот дополнительный текст в учебнике отсутствует. Он отсутствует ввиду его неоднозначности: предложив его в одном из вариантов, можно не угодить учителю. Кроме того, воспроизведение текста учебника, в котором все заготовлено и предусмотрено, может создать плохое впечатление у учащихся. Короче, хотелось бы, чтобы в своей дополнительной информации учитель показал свою эрудицию и знание предмета за пределами текста учебника.

Изучение предмета по данному учебнику предполагает участие в этом учителя. Однако это вовсе не означает, что отдельно взятый пункт учащийся не может «пройти» самостоятельно. В специальном пункте «Как готовиться по учебнику самостоятельно» (п. 28) рассматривается этот вопрос на примере доказательства третьего признака равенства треугольников (по трем сторонам) — одной из наиболее трудных теорем этого этапа обучения.

**А. В. Погорелов** (г. Харьков)

## ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА

# Приближенное решение геометрических задач

**С. С. Думитрашку** (г. Тирасполь)

Заметка предназначена тем учителям, которые озабочены выбором интересной, нестандартной тематики для кружка или факультатива по геометрии с учащимися старших классов. Речь идет о геометрических задачах на вычисление, точное решение которых либо требует знаний, выходящих за пределы школьной программы, либо попросту невозможно. Задачи приводятся к уравнениям степени выше 2 или к трансцендентным уравнениям. Формулировка их бывает порой совершенно «невинной» на первый взгляд.

Задача 1. *Равнобедренный треугольник с боковой стороной $b=4$ описан около окружности радиусом $r=1$. Вычислить основание треугольника, если известно, что оно меньше боковой стороны.*

Решение. Обозначив основание через $x$ и приравняв два выражения для площади треугольника, получаем $pr=0{,}5xh$, где $p=b+0{,}5x$ — полупериметр, $h=\sqrt{b^2-0{,}25x^2}$ — высота. После преобразований получаем уравнение $16+2x=x\sqrt{64-x^2}$. Единственное целесообразное упрощение — разделить обе части уравнения на $\sqrt{8+x}$. Получаем уравнение

$$2\sqrt{8+x}=x\sqrt{8-x}. \qquad (1)$$

Если исключить возможность применения общей формулы решения уравнения третьей степени (получающегося после возведения в квадрат), то приходится констатировать, что речь может идти только о приближенном решении.

На наш взгляд, в таких случаях оправдано применение вычислительной техники, особенно тогда, когда желательно получить значение корня с высокой точностью.

Рекомендуем придерживаться следующей общей схемы решения:

а) свести задачу к одному уравнению с одним неизвестным вида $f(x)=0$;

б) определить границы корней, т. е. непересекающиеся интервалы числовой прямой, содержащие по одному корню каждый (предпочтительны задачи, имеющие единственное решение);

в) для каждого выделенного интервала применить какую-либо стандартную программу приближенного решения уравнения.

Ясно, что тщательное определение границ корня совершенно необходимо. К тому же оно дидактически очень полезно, так как зачастую приводит к небольшому исследованию, требующему определенных аналитических навыков. Проведем его для задачи 1.

Поскольку сторона треугольника всегда больше диаметра вписанной окружности, то $2<x<4$. Представим уравнение (1) в виде, более удобном для дальнейшего исследования, возводя обе его части в квадрат. Так как $x<8$, то получаем равносильное уравнение $4(8+x)=x^2(8-x)$, или $x^3-8x^2+4x+32=0$. Исследование функции $f(x)=x^3-8x^2+4x+32$ просто. Нулями ее производной $f'(x)=3x^2-16x+4$ являются числа $(8-\sqrt{52})/3$ и $(8+\sqrt{52})/3$. Следовательно, в интервале $(2; 4)$ функция убывает, причем $f(2)=16>0$, $f(4)=-16<0$. Таким образом, в рассматриваемом интервале $(2; 4)$ уравнение (1) имеет единственный корень. Теперь можно переходить к реализации пункта в). Подсчет дает значение $x=2{,}941$ с точностью до третьего знака после запятой.

Если учитель сочтет столь строгое исследование нецелесообразным, то его можно опустить, приняв на веру единственность корня на промежутке $(2; 4)$. В таких случаях решающую роль следует отвести геометрической интуиции учащихся.

Задача 2. *Корабль бросил якорь в точке $A$, в четырех километрах от берега неизвестного острова, имеющего форму круга радиусом 5 км* (*рис.* 1). *Решив обследовать остров, моряки снарядили шлюпку.*

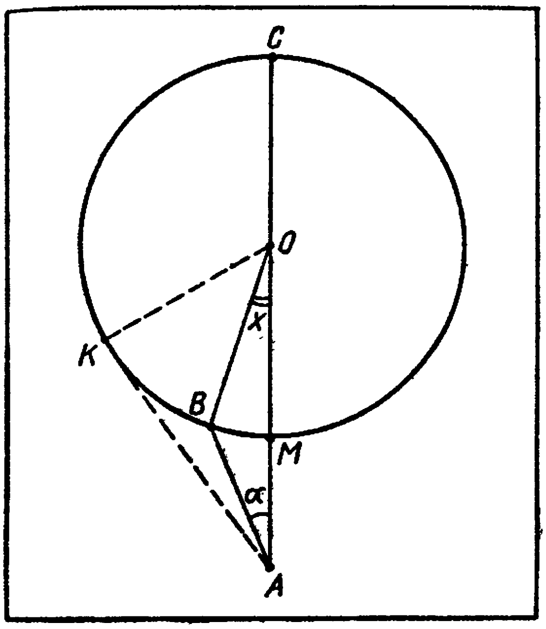



*Рис. 1*

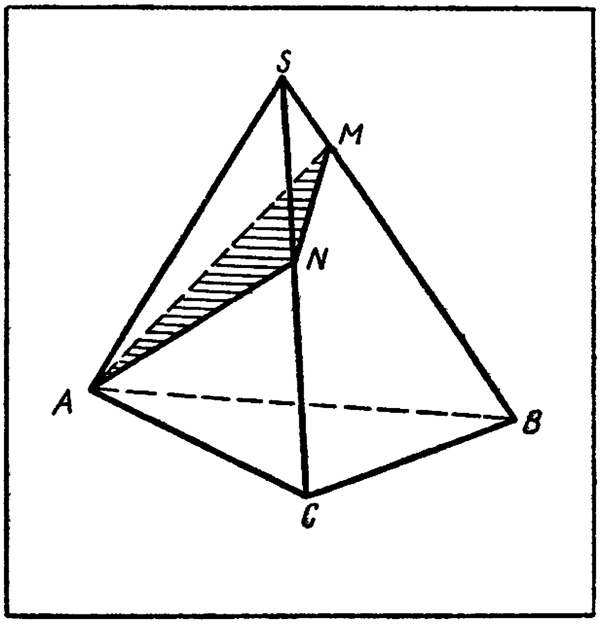



*Рис. 2*

*Плывя по прямой, шлюпка пристала к берегу в точке B. Исследователи высадились и пошли вдоль берега. Дойдя до наиболее удаленной точки C острова, они заметили, что прошло 3 ч 40 мин с тех пор, как они покинули судно. Под каким углом к AC отправилась первоначально шлюпка, если известно, что разведывательный отряд двигался с постоянной скоростью 5 км/ч как по морю, так и по суше?*

Решение. Обозначим искомую величину угла через $\alpha$. Путь отряда состоит из отрезка $AB$ и дуги $BC$. Обозначив центральный угол $BOA$ через $X$ и, отметив, что $OA=9$, $OB=5$, по теореме косинусов из треугольника $OBA$ получаем:

$AB=\sqrt{106-90\cos X}$. Длина дуги $BC$ равна

$$\frac{\pi\cdot 5\cdot(180-X)}{180}=5\pi\left(1-\frac{X}{180}\right).$$

Весь путь длился 11/3 ч, следовательно, длина пути равна 55/3 (км). Итак, задача свелась к трансцендентному уравнению

$$\sqrt{106-90\cos X}+5\pi\left(1-\frac{X}{180}\right)=55/3. \qquad (2)$$

Определим границы корня из геометрических соображений. Очевидно, что $X>0$ и $X$ не превосходит величины угла $KOA$, где $AK$ — касательная к кругу, т. е. $OK\perp AK$. Из треугольника $OKA$ получаем: $\cos\angle KOA=(OK/OA)=(5/9)$, значит, $0<X<\arccos(5/9)\approx 56{,}3°$. Из наглядных соображений ясно, что в указанном интервале изменения $X$ общая длина пути $ABC$ — убывающая функция аргумента $X$. Остается приближенно решить уравнение (2). После этого, получив приближенное значение $X$, следует вычислить $AB$ по приведенной выше формуле, а затем $\cos\alpha$ из треугольника $BOA$ по теореме косинусов. Сообщим ответ с точностью до одной десятой градуса: $\alpha=30{,}4°$.

В только что решенной задаче тщательное аналитическое исследование границ корня громоздко, и потому методически оправдана ссылка на наглядные соображения. То же самое можно сказать и о следующей задаче, при решении которой учитель также должен обратиться к геометрической интуиции учащихся.

Задача 3. *Через вершину $A$ правильного тетраэдра $SABC$ с ребром 6 проведена плоскость, пересекающая боковые ребра $SB$ и $SC$ тетраэдра в таких точках $M$ и $N$, что $SN=2SM$. Периметр полученного сечения оказался равным 14. Найти $SM$ (рис. 2).*

Решение. Пусть $SM=x$, тогда $SN=2x$. По условию $AM+$ $+MN+AN=14$. Выразим $AM$, $MN$ и $AN$ по теореме косинусов из треугольников $SAM$, $SMN$ и $SNA$ соответственно. Получим: $AM=$ $=\sqrt{6^2+x^2-12x\cos 60^\circ}=\sqrt{36+x^2-6x}$, $MN=\sqrt{x^2+(2x)^2-4x^2\cos 60^\circ}=$ $=x\sqrt{3}$, $AN=\sqrt{(2x)^2+6^2-24x\cos 60^\circ}=2\sqrt{9+x^2-3x}$. Итак, $x$ есть решение уравнения

$$\sqrt{36+x^2-6x}+x\sqrt{3}+2\sqrt{9+x^2-3x}-14=0.$$

Очевидно, $0<SM<3$. На промежутке $(0;\ 3)$ площадь сечения есть возрастающая функция от $x$ (сошлемся на наглядные соображения). Остается вычислить корень полученного уравнения с желаемой точностью. Ответ с точностью до третьего знака после запятой: $SM=1{,}975$.

# Уравнение прямой на уроках алгебры и геометрии

**Н. А. Терешин (Калининград)**

В учебнике геометрии А. В. Погорелова к получению уравнения прямой подходят следующим образом. Рассматривают точки $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2)$, симметричные относительно прямой $l$ (рис. 1). На прямой $l$ выбирают произвольную точку $M(x,\ y)$. Находят расстояния $AM=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$ и $BM=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$. Далее, так как $AM^2=BM^2$, то $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$. После очевидных преобразований приходят к уравнению: $2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+$ $+(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)=0$ (1). Обозначая $2(x_2-x_1)$ через $a$, $2(y_2-y_1)$ через $b$ и $x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2$ через $c$, окончательно получают уравнение прямой $l$ в виде $ax+by+c=0$.

В курсе алгебры восьмилетней школы подход иной: прямая — график линейной функции. При изучении функций (в том числе и линейной) основное внимание уделяется тому, чтобы научить учащихся по точкам строить график функции и по построенному графику описывать свойства этой функции. Таким образом, при конструировании уравнения прямой в геометрии уровень абстракции более высокий, чем в алгебре. Поскольку и алгебру, и геометрию ведет один и тот же учитель, он должен осуществлять некоторую «нивелировку» излагаемого материала. В частности, если в геометрии материал об уравнении прямой изложен в том плане, который указан выше, то на уроках алгебры

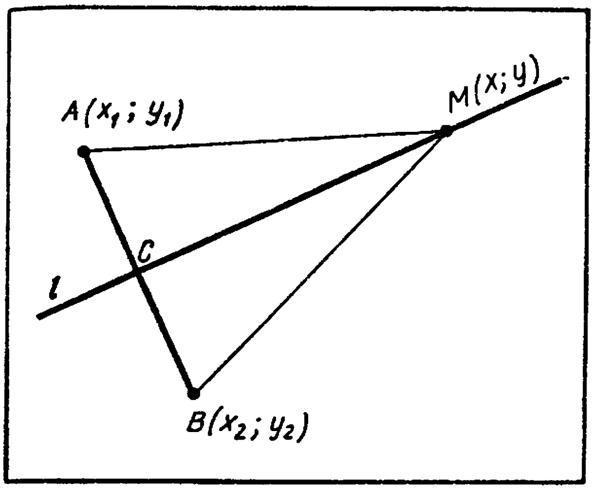



Рис. 1

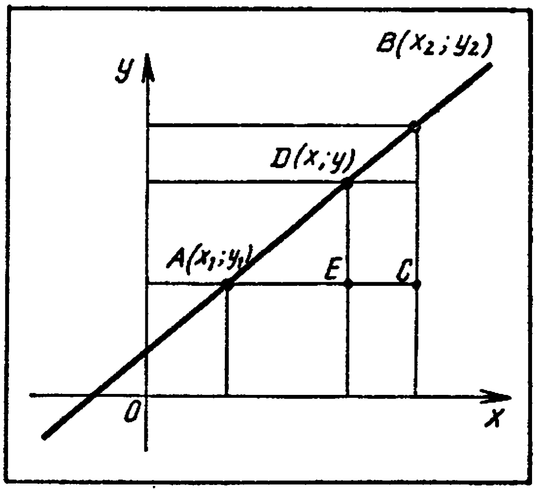



Рис. 2

целесообразно установить связь между таким изложением и тем, которое принято в курсе алгебры. Это можно сделать, например, следующим образом. Вначале рассмотреть две задачи.

Задача 1. Сконструировать линейную функцию $f(x)=kx+b$ по коэффициенту $k$ при аргументе и значению ее в некоторой точке: $f(x_1)=y_1$. (Геометрически это соответствует нахождению уравнения прямой, которая имеет заданный угловой коэффициент $k$ и проходит через данную точку $A(x_1;\ y_1)$.)

Решение. Так как известно $k$, то для нахождения $b$ необходимо в уравнение $y=kx+b$ (2) подставить вместо $x$ и $y$ соответственно $x_1$ и $y_1$. Получим: $y_1=kx_1+b$ (3). Вычитая равенство (3) из равенства (2), будем иметь: $y-y_1=k(x-x_1)$, что и дает искомую функцию: $y=kx+y_1-kx_1$ (4).

Геометрически соотношение (4) представляет собой уравнение пучка прямых с центром в точке $A(x_1;\ y_1)$. При этом из рассмотрения выбрасывается прямая, перпендикулярная оси $0x$.

Задача 2. Сконструировать линейную функцию $f(x)=kx+b$ по двум ее значениям, принимаемым в двух заданных различных точках: $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ $(x_1\neq x_2)$. (Геометрически это соответствует нахождению уравнения прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$.)

Решение. Имеем: $y_1=kx_1+b$ и $y_2=kx_2+b$. Вычитая первое равенство из второго, получаем: $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$, откуда $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (5).

Подставляя $k$ в равенство (4), находим: $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$, что и дает искомую линейную функцию. Если $y_2\neq y_1$, то можно это уравнение записать в следующем виде, более удобном для запоминания: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (6).

Уравнение (6) может быть получено и другим путем (геометрическим), что для многих учащихся кажется значительно проще. А именно, возьмем точку $D(x;\ y)$, находящуюся между точками $A$ и $B$ (рис. 2). Из подобия треугольников $ABC$ и $ADE$ получаем:

$\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE}$, т. е. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$, или, что то же самое, $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Однако этот простой геометрический вывод является неполным, поскольку нужно рассмотреть и другие возможные положения точки $D$ (не только между $A$ и $B$). Алгебраический вывод является более абстрактным, но полным.

В связи с решением задачи 2 заметим, что уравнение (6) может быть записано в виде $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+\ldots$ (свободный член не вписываем, так как он не понадобится). Иначе говоря, угловой коэффициент прямой $AB$ равен: $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (7).

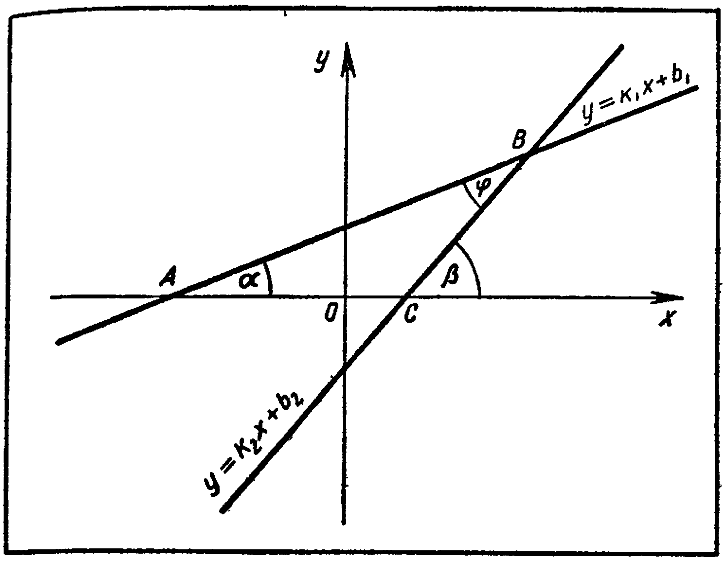
Равенство (7) можно установить и непосредственно геометрически (рис. 2).

К сожалению, ни в пособии для учителя, ни в многочисленных методических рекомендациях учитель (и тем более ученик) не увидит связи (и различия) между уравнениями (1) и (6). Ведь и там и здесь речь идет об уравнении прямой, заданной координатами некоторых двух точек, однако во втором случае берутся две точки, через которые прямая проходит, а в первом — точки, симметричные относительно этой прямой (рис. 1). Поэтому (и это в первую очередь должен понимать учитель!) необходимо показать зависимость между уравнениями (1) и (6). Один из возможных путей для этого состоит в том, чтобы вывести формулу для нахождения угла между прямыми.

Пусть даны линейные функции $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ и требуется найти угол $\varphi$ между графиками этих функций (рис. 3). Обозначим через $\alpha$ и $\beta$ углы, образованные этими прямыми с положительным направлением оси $0x$. Угол $\beta$ является внешним по отношению к треугольнику $ABC$, поэтому $\beta=\alpha+\varphi$, откуда $\varphi=\beta-\alpha$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha=k_1$ и $\operatorname{tg}\beta=k_2$, то $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}$. Из этой формулы вытекают условия параллельности ($k_2=k_1$) и перпендикулярности ($k_2=-\frac{1}{k_1}$) графиков данных функций.

Теперь уже нетрудно установить связь между уравнениями (1) и (6). Прямая $l$ (рис. 1) перпендикулярна прямой $AB$. Значит, ее угловой коэффициент $k_l=\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}$ (см. (7)). Кроме того, прямая $l$ проходит через точку $C$ (середину $AB$), имеющую координаты $x_c=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y_c=\frac{y_1+y_2}{2}$. Для нахождения уравнения прямой $l$ в виде $y=kx+b$ остается воспользоваться результатами задачи 1 (см. 4)): $y=\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}\cdot x+\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}$. Приведя обе части к общему знаменателю и опустив его, получим в точности уравнение (1).

Можно было идти и обратным путем: изначально взять уравнение (1) и после соответствующих рассуждений прийти к уравнению (6). Эти процедуры целесообразны в процессе изучения соответствующих тем программы и особенно уместны при обобщающем повторении, ибо



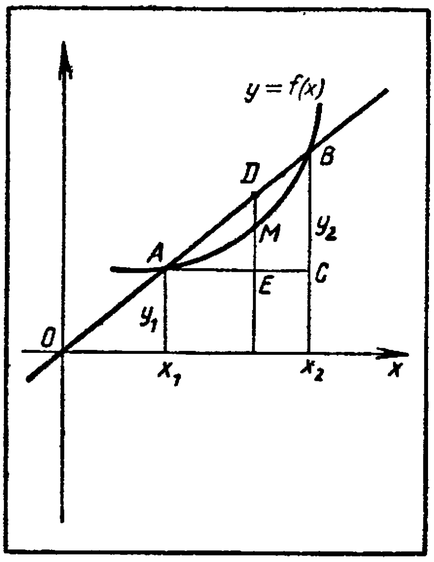




Рис. 3 Рис. 4

ничто так не развивает интерес, как установление причинно-следственных связей между изучаемыми объектами (или явлениями).

Заметим в заключение, что уравнение (6) можно получить совершенно из других посылок и это будет способствовать повышению математической культуры учащихся. Имеется в виду задача линейной интерполяции. Она состоит в том, что по значениям некоторой непрерывной функции $y=f(x)$ на концах отрезка $[x_1, x_2]$, т. е. по значениям $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, требуется найти приближенное ее значение в некоторой промежуточной точке $x$. Для этого функцию на отрезке $[x_1, x_2]$ заменяют линейной функцией, график которой проходит через точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ (рис. 4).

Из $\triangle ABC$ находим: $k=\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Далее из $\triangle ADE$ имеем: $DE=(x-x_1)\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$.

$DE$ рассматривается как приближенное значение приращения $\Delta y$ функции $y=f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Таким образом, приближенное значение функции $y=f(x)$ в точке $x$ будет равно:

$$y\approx y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1) \qquad (8).$$

Абсолютная погрешность приближения в данном случае равна длине отрезка $DM$.

Эта интерполяционная формула лежит в основе приближенных вычислений и построения математических таблиц. В случае, если речь идет о нахождении промежуточного значения не функции $y=f(x)$, а линейной функции $y=kx+b$, равенство (8) будет не приближенным, а точным, т. е. $y=y_1+\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$.

Две рассмотренные задачи (геометрический и алгебраический выводы уравнения прямой) решаются в различных школьных учебных предметах. Однако в математике они являются объектом изучения единой науки — аналитической геометрии, которая дает арифметическую модель геометрии Евклида. Это полезно знать учителю.

# Математический вечер в школе

**А. Г. Позднякова** (г. Люберцы)

Я хочу рассказать об одном математическом вечере, который долго был памятен учащимся школы № 5 г. Люберцы.

Вечер состоял из трех частей: короткая инсценировка «Геометрический съезд», викторина и устный журнал «Знаете ли вы?».

Для инсценировки ребята приготовили очень простые костюмы. Собственно, весь «костюм» состоял из эмблемы. На рис. 1 показаны эмблемы таких действующих лиц, как Точка, Угол, Треугольник. В роли окружности выступала девочка с лентой на голове и обручем в руках; две девочки с одинаковыми перевязями через плечо изображали Параллельные прямые. Играя свою роль, они двигались синхронно, ни в коем случае не задевая друг друга. Шар и Цилиндр заявляли о себе головными уборами, которые были изготовлены в виде соответствующих моделей. Стихотворный текст нашей инсценировки есть сокращенный и несколько измененный вариант пьесы с таким же изванием, которая опубликована в книге [7].

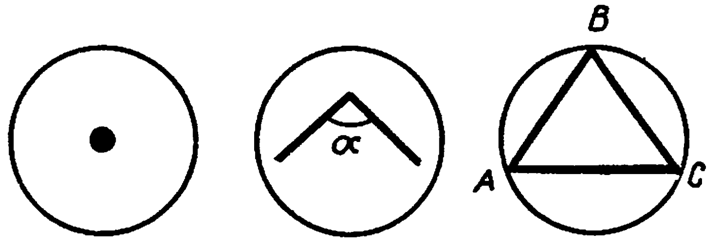



*Рис. 1*

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СЪЕЗД

*Шар — председатель. Цилиндр — секретарь.*

*Шар.* Я открываю заседанье  
И должен вам сказать, что очень рад  
Приветствовать почтенное собраиье.  
Опросим же гостей подряд и выясним их званья...  
Пусть младшие начнут.

*Перед Шаром останавливается Точка.*

*Шар.* Кто тут? Я ничего не вижу.

*Точка.* Я невидимка. В этом суть моя...  
Хотя меня нельзя измерить,  
Настолько я ничтожна и мала,  
Но все собранье я могу уверить,  
Что геометрии я пользу принесла:  
Двух линий я пересеченье,  
Служу всегда вершиною угла.

*Шар.* Хоть ты действительно мала,  
Но полезна, в этом нет сомненья!  
*(Секретарю)* Чья дальше очередь?

*Цилиндр.* По списку линия прямая.

*Прямая.* Я здесь!  
Сейчас я вертикальна,  
Могу однако же любой принять наклон,  
Могу и лечь горизонтально.

Я между точек двух короче линий всех,
При том одно лишь я имею измеренье.

*Шар.* Что ты худа, нельзя считать за грех.
А рядом кто с тобой?

*Прямая.* Моя сестра родная.

*Кривая.* Зовусь я линия кривая.
В двух точках встретившись с прямой,
Всегда тянусь над ней дугой.

*Перпендикуляр.*
А я, почтенный Шар,— Перпендикуляр.
Смотри внимательно за мной:
Когда из точки вне прямой
Меня опустят на прямую
И проведут наклонную любую
Из той же точки...

*Шар.* Что тогда?

*Перпендикуляр.*
Докажет всякий школьник без труда,
Что я всегда короче, чем наклонная любая.
Горжусь изрядно я,
Что в том особенность моя.
*(Подкатывается Окружность — девочка катит обруч.)*

*Окружность.* А я окружность! Вам я, Шар, родня.

*Шар.* Не может в этом быть сомненья.

*Окружность.* Произошли Вы от меня
При помощи вращенья. *(Девочка вращает обруч.)*
Внутри меня есть точка не простая.

*Шар.* А кто сей важный пункт?

*Окружность.* Зовется Центром он.
От точек всех моих он равноудален.

*Шар.* В каких же отношениях ты с прямой?

*Окружность.* Смотря с какой?

*Шар.* Ну если, например, с тобой прямая
В точках двух пересечется?

*Окружность.* Внутри меня ее отрезок Хордою зовется,
Чем ближе к центру, тем она длиннее...
Еще скажу тебе: когда идет прямая,
Меня в двух точках рассекая,
Ее Секущей линией зовут.

*Прямая.* Уместно мне добавить тут, что у окружности с прямой
Быть может встреча с точкой и одной.
Когда прямая так окружности коснется,
Она Касательной зовется.

*Окружность.* Добавлю я, что в древности глубокой,
В дни первой юности моей,
На 360 частей моя длина была разделена.
Частями этими мне дуги измеряют,
Их градусами называют.

*Шар.* Твой обстоятельный доклад
Я выслушать душевно рад.

*Цилиндр.* А чей сейчас черед?
Прошу вас, Параллели!
Скажите нам, к какой идете цели?

*Параллели.* Откуда мы идем, придем куда?
Не знаем сами никогда.
Друг к другу мы стремимся вечно.

Как две сестры, бок о бок мы идем.
Нас под прямым углом прямая рассекает,
Ее отрезок слиться нам мешает.
Ему везде одна и та же мера,
И сократить ее нам силы не дано.

*Шар.* Особым свойством вы наделены:
Когда бока фигур попарно параллельны,
Они всегда попарно и равны.
Прямоугольник, Ромб, Квадрат —
Все этим свойством дорожат,
Но кто там прячется за вами?
Без головы с двумя ногами?

*Угол.* Ошиблись Вы немножко, Шар.
От Ваших слов меня бросает в жар.
Мне служит головой вершина,
А то, что вы считаете ногами,
Все называют сторонами.
Увеличить стороны мои, когда угодно,
Вы сможете совсем свободно.

*Шар.* Постой, дружок,
Ты выступаешь смело,
Но ведь совсем не в этом дело,
Скажи мне, кто ты сам?

*Угол.* Но чем смущает вас мой вид? Ведь я часть плоскости.

*Шар.* И этого мне мало,
Ты отвечаешь, как попало.

*Угол.* Когда встречаются прямые,
Всегда мы будем между ними.

*Цилиндр.* Кто же вы? *(Насмешливо.)*
Сейчас, видать, без головы.
Ну, свойства же твои какие?

*Угол.* Мы — разные углы.
Я, например, прямой. Бывают острые углы, тупые.

*Шар.* А сколько градусов в тебе?

*Угол.* Как будто б девяносто!

*Шар.* Но если стороны мы будем продолжать?

*Угол.* Тогда я буду возрастать. *(Действующие лица смеются.)*

*Шар.* Вот видишь, милый, стало всем смешно,
Ты плохо знаешь сам себя.

*Угол (вздыхает).* Ошибся я.

*Шар (наставительно).* Вот то-то и оно. Ну, поправляй ошибку:
От градусов зависишь ты, таков закон,
Что ни при чем длина твоих сторон,
Продолжи их хоть до конца Вселенной,
Раствор твой будет неизменный.
Кто за тобой?

*Треугольник.* Зовусь я Треугольник,
Со мной хлопот не оберется школьник...
По разному всегда я называюсь,
Когда углы иль стороны даны:
С одним тупым — тупоуголен,
Коль острых два, а третий прям — прямоуголен я.
Бываю я равносторонним, когда все стороны равны.
Когда ж все разные даны, то я зовусь разносторонним.
И если, наконец, равны две стороны,
То равнобедренным я величаюсь.

*Прямоугольный треугольник.*
Пора, мой милый, вам уйти,
Меня к докладу пропустите!
*Шар.* Имеешь ты особую примету?
*Прямоугольный треугольник.*
Моих заслуг никто не перечислит,
О том всему известно свету.
От древних египтян мне был большой почет.
Через меня и Пифагор стал славен.
Уж так и быть, открою свой секрет:
Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.
*Шар.* Хоть правилен ответ, но ты заносчив, мой дружок,
И отвечаешь дерзко. Кто там еще?
*Квадрат.* Зовут меня Квадратом.
Любую площадь я измерить рад.
Ведь у меня четыре стороны
И все они равны.
*Шар.* Ну, это мы давно слыхали.
*Квадрат.* Но у меня равны еще диагонали,
Углы мне они делят пополам, ими
На части равные разбит я.
*Прямоугольник (перебивая).*
И у меня равны диагонали!
*Шар.* Постой, дружок, тебя не вызывали.
*Ромб (вмешивается).*
Мои хотя и не равны,
Но под прямым углом пересекаются!
Совсем как у квадрата.
*Шар.* Да, постой! И ты черед не соблюдаешь свой!
*Параллелограмм (перебивая).*
Я — параллелограмм. Хоть стороны мои
Попарно и равны, и параллельны,
Все же я в печали, что не равны мои диагонали.
*Квадрат (язвительно).* Да и углы они не делят пополам.
*Шар (кричит).* Нет, это просто срам! *(Звонит колокольчиком.)*
К порядку, граждане, нельзя же так!
Вы превратили заседанье в кавардак!
*Цилиндр.* Я думаю, вы утомлены.
Пора бы кончить заседанье.
*Шар.* Ну что ж, друзья мои, не возражаю.
Мы от собравшихся гостей
Достаточно узнали новостей.
Благодарю, что аккуратно вы явились
И честно потрудились
Все ваши свойства съезду пояснить.

## ВИКТОРИНА

Ведущий задавал вопросы викторины всем участникам вечера, а специальное жюри присуждало определенное число очков за каждый правильный ответ. Ребята соревновались по классам.

Победителем объявлялся тот класс, от которого поступило больше правильных ответов. Приведем некоторые вопросы викторины.

1. Сколько получится десятков, если 2 десятка умножить на 2 десятка. [40 десятков.]

2. Сколько ответов можно дать на следующий вопрос: «Что больше: $a$ или $2a$?» [3 ответа. Если $a > 0$, то $2a > a$; если $a < 0$, то $2a < a$; если $a = 0$, то $2a = a$.]

3. Чему равны углы ромба, если одна из его диагоналей равна стороне?

4. На часах ровно 9. Через сколько минут стрелки часов (минутная и часовая) совпадут? [Через 49 мин.]

5. Как изменится площадь треугольника, если каждую его сторону увеличить в два раза. [Площадь увеличится в 4 раза.]

6. В каком треугольнике высоты пересекаются в одной из его вершин?

7. На лугу паслись 25 животных. Коров было втрое больше, чем лошадей, а овец вдвое больше, чем свиней. Зная, что не все лошади были одной масти, определите, сколько каких животных паслось на лугу. [Если лошадей было $x > 1$, а свиней $y$, то $4x + 3y = 25$. Тогда $x = 4$, $y = 3$.]

8. Какие натуральные числа удовлетворяют уравнению:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1?$$

[$x = 2$, $y = 3$ или $x = 3$, $y = 2$.]

9. Вычислите простейшим образом

$$1{,}2345^2 + 0{,}7655^2 + 2{,}469 \cdot 0{,}7655$$

[Пусть $1{,}2345 = x$, $0{,}7655 = y$, тогда $x + y = 2$ и $(x + y)^2 = 4$.]

10. Биссектриса и медиана, проведенные из вершины прямого угла треугольника $ABC$, отсекли равнобедренный треугольник $DEA$. Найдите величины его углов. [30°, 30°, 120°.]

## УСТНЫЙ ЖУРНАЛ

Эта часть вечера не требовала от ребят соревнования. Важно было только участие в выпуске «журнала». Мы постарались дать слово как можно большему числу школьников. Ребят просили заранее почитать математическую литературу и найти в ней интересные факты, которые можно было бы изложить коротко, за 1—2 мин. Ведущие «Устного журнала» (их было несколько человек) подготовили ряд коротких рассказов из истории математики, из области приложения математики к практике, из тех разделов науки, которые не изучаются в школе, но доступны учащимся. Основная цель ведущих состояла не в том, чтобы изложить свои «заготовки», а в том, чтобы увлечь беседой собравшихся, побудить участников вечера к выступлениям. От ведущих вообще зависело очень многое. Свои материалы они рассказывали «для затравки», поэтому должны были говорить весело или таинственно, обыгрывая сообщаемый факт, как эстрадную миниатюру.

1. *«Знаете ли вы, что такое лист Мёбиуса?»*

Опишем диалог ведущих А и Б.

А. Послушай, что бы ты сказал, если бы тебе изготовили рубашку без изнанки?

Б. Значит, ее можно было бы надевать с двух сторон? Это было бы неплохо. Наши хиппи в варёнках просто лопнули бы от зависти.

А. Нет, тут дело посложнее: рубашка с одной только стороной.

Б. Не морочь мне голову. Таких рубашек не бывает.

А. Конечно, я пошутил. Но вообще, оказывается, одностороннюю поверхность можно сконструировать. Вот, например, цилиндр (*свертывает в трубочку листок бумаги и показывает его товарищу*). Он представляет собой двустороннюю поверхность. Если двигаться по одной его поверхности (водит концом карандаша по внешней стороне цилиндра), то, не пересекая «границы», нельзя очутиться на другой его стороне, т. е. внутри цилиндра. А теперь смотри. (*Берет длинную прямоугольную полоску бумаги и склеивает ее так, как показано на рис. 2.*) Я ставлю жирную точку на одной стороне этой линии и буду водить карандашом по ней вправо.

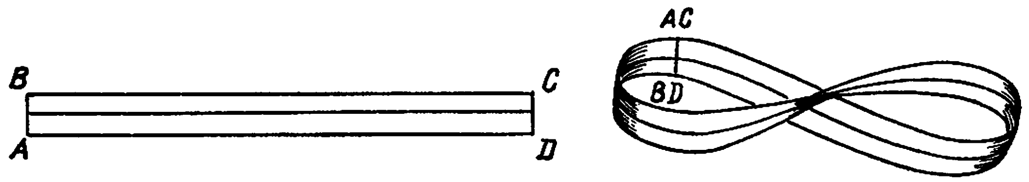



*Рис. 2*

Б. И ты надеешься придти в ту же точку, но на другой стороне этого листа? Этого не может быть, потому что этого не может быть никогда.

А. Эх ты, Фома неверующий. Смотри! (*Проделывает обход, и все видят, что карандаш ведущего А оказался «с другой стороны».*) Если хочешь, убедись сам.

Ученик Б тоже проделывает этот опыт, а за ним кто угодно из желающих. Ученик А сообщает, что такую одностороннюю поверхность впервые рассмотрели независимо друг от друга в 1858—1865 гг. немецкие математики А. Ф. Мёбиус и И. Б. Листинг. Ныне эта кривая поверхность называется листом Мёбиуса. А изучает такие поверхности особая ветвь науки математики — топология. [3]

Укажем еще ряд интересных фактов, которые можно было бы обыграть в «Устном журнале».

2. *«Знаете ли вы, кто быстрее?»* Телевидение транслирует оперный спектакль из миланского театра «Ла Скала» в Норвегию. Кто первый услышит начало увертюры в опере: зритель, сидящий в зале театра на расстоянии 25 м от сцены, или телезритель в Норвежском городе Хаммерфесте? Расстояние Милан — Хаммерфест около 2900 км, скорость звука 340 м/с, скорость распространения электромагнитных волн 300 000 км/с.

Ответ. В обоих случаях вычисления будем проводить по формуле $t=s/v$. Милан: $t_1=25/340=0{,}0735$ (с), Хаммерфест: $t_2=$ $=2900/300\,000=0{,}0097$ (с); $t_2<t_1$. Итак, телезритель в далекой Норвегии услышит первый звук увертюры раньше того, кто сидит в театре.

3. *«Знаете ли вы, кто предложил эту задачу?»* При дворе франкского короля Карла Великого служил ученый монах из Ирландии Алкуин (736—804). Он написал несколько элементарных учебников

по математике. Однажды король и Алкуин отдыхали вместе после охоты, и Алкуин в шутку предложил королю прикинуть, за сколько прыжков его гончая настигнет зайца, если первоначально их разделяет расстояние 150 футов, заяц с каждым прыжком удаляется от собаки на 7 футов, а собака бежит быстрее зайца и с каждым прыжком приближается к нему на 9 футов. Карл был не только искусным охотником, но знал толк и в арифметике. Что он ответил Алкуину? [5]

Учащиеся, конечно, быстро решат эту задачу и попутно убедятся в том, какой длинный исторический путь проделывает даже очень простая задача.

Каждый учитель, который захочет провести подобный математический вечер, сможет почерпнуть подходящие материалы из литературы, которая указана ниже, или из других источников по занимательной математике. Их опубликовано довольно много.

### Литература


1. *Воронец А. М.* Математические развлечения. М.: Учпедгиз, 1931.
2. *Гарднер М.* Математические досуги. М.: Мир. 1972.
3. *Кордемский Б. А., Ахадов А. А.* Удивительный мир чисел (Математические головоломки и задачи для любознательных): Книга для учащихся. М.: Просвещение, 1986.
4. *Коробёнок Е. В., Столяр А. А.* Сколько сторон у поверхности?: Беседы с учащимися VII—X классов. Минск: Народная асвета, 1985.
5. *Леман И.* Увлекательная математика. М.: Знание, 1985.
6. *Лоповок Л. М.* Математика на досуге: Книга для учащихся среднего школьного возраста (IV—VIII классы). М.: Просвещение, 1981.
7. *Рупасов К. А.* Математика на школьной сцене. Тамбов, 1959.


**ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА**

## А фокусы ли это?

**Обычно операция деления одного числа на другое производится уголком с подбором цифр частного. Однако на протяжении 100 с лишним лет на страницах различных зарубежных и отечественных журналов появляются отдельные примеры деления оригинальными и на первый взгляд похожими на фокусы способами. Ниже мы приводим несколько примеров. Найти всем им объяснение — задача увлекательная как для учителей математики, так и для любознательных учащихся.**

П р и м е р 1. *Найти период дроби* $\frac{1}{7}$.

С п о с о б I. Пишем 7, умножаем на 5, результат вновь умножаем на 5 и т. д. многократно. Каждый результат записываем под предыдущим со смещением на один разряд влево. Складывая числа столбиком, находим искомый период, формирующийся при этом способе «с конца».

```
         7
        35
       175
       875
      4375
     21875
    109375
    ......
----------
...7142857
```

С п о с о б II. Пишем 14, умножаем на 2, далее действуем аналогично способу I, но смещаем промежуточные результаты на два разряда вправо. Способом II период формируется «с начала».

О т в е т: 0,(142857).

```
14
  28
    56
    112
      224
        448
        ....
------------
142857142...
```

П р и м е р 2. *Найти период дроби* $\frac{1}{89}$.

Пишем в столбик со смещением вправо на один разряд числа Фибоначчи, начиная с 0 и 1. Складываем столбиком. Период при этом формируется «с начала».

О т в е т: 0,(0112359550...191). В периоде 44 цифры.

```
0
 1
  1
   2
    3
     5
      8
      13
       21
        34
         55
          89
          144
           ...
--------------
0112359550....
```

П р и м е р 3. *Найти период дроби* $\frac{1}{109}$.

Пишем в столбик со смещением влево на один разряд числа Фибоначчи, начиная с 1 и 1. Складываем столбиком. Период при этом формируется «с конца».

О т в е т: 0,(0091...348623853211). В периоде 108 цифр.

```
              1
             1
            2
           3
          5
         8
       13
      21
     34
    55
   89
  144
  ....
---------------
...348623853211
```

П р и м е р 4. Найти период дроби $\frac{1}{39}$.

С п о с о б I. Пишем единицу, умножаем ее на 4 и записываем последнюю цифру результата (четверку) слева от единицы. Количество десятков результата (ноль в данном случае) запоминаем «в уме». Далее умножаем последнюю записанную цифру 4 вновь на 4 и записываем (с учетом 0 «в уме») последнюю цифру результата (шестерку) слева, единица «в уме». Умножаем 6 вновь на 4 и с учетом 1 «в уме» получаем 25. Последнюю цифру 5 записываем слева, 2 «в уме». И т. д. многократно. Записываемые последние цифры в итоге образуют период «с конца»:

$$\begin{array}{rl} \ldots 1025641 & \leftarrow \\ 12210 & \leftarrow \text{(«в уме»)} \end{array}$$

Ответ: 0,(025641).

Способ II. Пишем число 01, рядом справа его отражение 10, которое затем преобразуем в четверичную систему $22_4$ и записываем под 01. Рядом пишем отражение 22 и, считая его десятичным числом, преобразуем в четверичную систему $52_4$ (метод требует записывать числа, большие 3 в четверичной системе десятичными цифрами) и записываем под 22 в четверичной колонке. Его отражение 25 пишем в десятичную колонку и т. д. до повторения.

| (4) | (10) |
|---|---|
| 01 | 10 |
| 22 | 22 |
| 52 | 25 |
| 61 | 16 |
| 40 | 04 |
| 10 | 01 |

При этом правая сторона десятичной колонки дает сверху вниз искомый период в десятичной системе. Левая же сторона в противоположном направлении дает период в четверичной системе. Заметим, что цифры периода в четверичной системе — это те же цифры, что были «в уме» при решении I способом. Очевидно, при записи достаточно ограничиться одной колонкой.

Ответ: 0,(025641) или $0,(001221)_4$.

В следующих примерах: № 5 (деление на числа с цифрой 1 на конце) и № 6 (деление на числа с цифрой 9 на конце) деление производится нацело. В случаях неделимости нацело результат строится несколько сложнее, предлагаем в этом разобраться самостоятельно. Частное в этих примерах получается «с конца».

Пример 5. 5658:41=?

$$\begin{array}{r|l} -565\underline{8} & \underline{41} \\ \underline{32\phantom{0}} & 138 \\ -53\underline{3} & \\ \underline{12\phantom{0}} & \\ -4\underline{1} & \\ \underline{4\phantom{0}} & \\ 0 & \end{array}$$

Последняя цифра делимого есть последняя цифра частного. Она умножается на 4 (количество десятков делителя). Произведение записывается под делимым левее на 1 разряд. Производится вычитание. Последняя цифра остатка вновь умножается на 4 и т. д. до получения нулевого остатка. Последние цифры остатков и являются цифрами частного, которые записываются снизу вверх. Ответ: 138.

Пример 6. 9246:69=?

$$\begin{array}{r|l} -10000 & \\ \underline{9246} & \\ +75\underline{4} & \underline{69} \\ \underline{28\phantom{0}} & 134 \\ +10\underline{3} & \\ \underline{21\phantom{0}} & \\ +3\underline{1} & \\ \underline{7\phantom{0}} & \\ 10\phantom{0} & \end{array}$$

Находится десятичное дополнение делимого (754). Его последняя цифра 4 есть последняя цифра частного. Она умножается на 7 (увеличенное на 1 количество десятков делителя), произведение записывается ниже со смещением на 1 разряд влево. Производится сложение. Последняя цифра промежуточной суммы 103 есть вторая справа цифра частного, которая вновь умножается на 7 и т. д. до получения промежуточной суммы в виде степени десяти; при этом цифра 1 степени десяти должна находиться под цифрой 1 числа 10 000, до которого бралось дополнение делимого. Ответ: 134.

Анализ приведенных и подобных им примеров позволил автору найти общий способ деления на любые числа с применением операций умножения и сложения без всякого подбора цифр частного.

Способ заключается в многократном умножении делимого на десятичное дополнение делителя с записью результатов столбиком. При этом промежуточные результаты сдвигаются вправо на столько разрядов, сколько нулей в числе, до которого искалось дополнение делителя. Способ позволяет найти приближенный результат деления с любой желаемой степенью точности. Результат после сложения столбиком мы получаем «с начала», как и при обычном делении «уголком».

Пример 7. 354:6=?

Производим умножение на десятичное дополнение числа 6, равное 4.

Ответ: 59,0 с точностью до $10^{-2}$.

```
+354    | 6
 1416     58,999...
  5664
  22656
   90624
   362496
   1449984
   .......
 ------------
 58999...
```

Поистине подтверждаются пророческие слова замечательного мастера занимательной математики Я. И. Перельмана о том, что «длиннейшие периоды бесконечных дробей представляют собой настоящую Калифорнию интереснейших арифметических достопримечательностей».

В. Г. Столяр (Москва)

## ЗАДАЧИ

**В этом номере журнала задачи отдела разделены на две части. В первой части мы предлагаем подборку избранных задач математических боев; во второй — конкурсные задания, предложенные нашему журналу редколлегией родственного французского издания «Бюллетень АПМЕП» (АПМЕП — Ассоциация преподавателей математики народного образования). Мы, со своей стороны, также послали во Францию задачи советских авторов. Этот конкурс редакции журналов посвящают 200-летию Великой Французской революции.**

**Конкурсные задачи, предложенные французскими коллегами, не совсем привычны и весьма (на наш взгляд) трудны. Надеемся, что читатели журнала «Математика в школе» не посрамят чести советских учителей.**

**Напоминаем, что решения алгебраических и геометрических задач следует присылать в отдельных конвертах с соответствующей пометкой «Алгебра» или «Геометрия». В каждый из них просим вложить две сводки — общую и по соответствующему разделу.**

**Решения задач этого номера должны быть отправлены в редакцию не позднее 1 января 1990 г. О правилах оформления решений см. в № 2 журнала за 1989 г. на с. 159—160.**

## Избранные задачи математических боев

3361. *Имеется два трехлитровых сосуда. В одном налит 1 л спирта, в другом — 1 л воды. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой. Можно ли за несколько переливаний сделать 60 %-ный раствор спирта в том сосуде, где была вода?*

3362. *Записать цифры от 0 до 9 в строчку так, чтобы любое число, составленное из двух идущих подряд цифр, делилось на 7 или 13.*

3363. *В банке лежат белые и черные зерна. Мы наугад достаем два зерна. Если зерна одного цвета, то мы их выбрасываем, а в банку добавляем черное зерно; если зерна разного цвета, то черное выбрасываем, а белое кладем обратно. В конце концов осталось одно зерно. Какого оно цвета, если известно исходное число белых зерен?*

3364. 100 *конфет лежат в* 50 *коробках. Девочка и мальчик по очереди берут по одной конфете. Начинает девочка. Доказать, что мальчик может играть так, чтобы две последние конфеты оказались в одной коробке.*

3365. *Девять грибников собрали* 220 *грибов, причем каждые два собрали различное число грибов. Доказать, что найдутся пятеро грибников, собравших вместе не более* 110 *грибов.*

3336. *На плоскости расположены* 100 *непересекающихся окружностей разных радиусов. Известно, что среди любых* 10 *из них хотя бы одна находится внутри другой. Доказать, что существует последовательность из* 12 *окружностей, каждая из которых (кроме последней) находится внутри следующей.*

3367. *На плоскости даны* 1000 *точек и окружность радиуса* 1. *Доказать, что на окружности найдется точка, сумма расстояний от которой до этих точек не меньше* 1000.

3368. *Расположить на плоскости* 12 *одинаковых квадратов так, чтобы они не налегали друг на друга и выполнялось условие: как бы ни окрасить квадраты в три цвета, обязательно найдутся два квадрата одного цвета, прилегающие друг к другу частью стороны (не точкой).*

3369. *Три спортсмена — $X$, $Y$, $Z$ — участвовали в забеге. Известно, что $Z$ задержался на старте и выбежал последним, а $Y$ — вторым. Во время бега $Z$ 6 раз менялся местами с другими участниками, а $X$ — 5 раз. Еще известно, что $Y$ финишировал раньше $X$. В каком порядке финишировали спортсмены?*

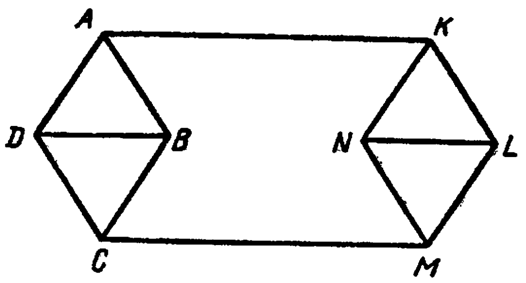
3370. 48 *кузнецов должны подковать* 60 *лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову* 5 *мин? (Учтите, что лошадь не может стоять на двух ногах.)*

3371. *Дано* 100 *положительных чисел. Известно, что произведение* *любых 17 из них больше 1. Доказать, что произведение всех чисел больше 1.*

3372. *Доказать, что в любой бесконечной возрастающей арифметической прогрессии найдется член, десятичная запись которого начинается с единицы.*

3373. *Найти множество середин всех отрезков, концы которых лежат:* а) *на данной полуокружности;* б) *в фигуре, являющейся объединением диагоналей квадрата.*

3374. *У пятиугольника все углы равны. Доказать, что для любой его точки сумма расстояний до всех сторон постоянна.*




3375. *В вершинах куба записаны положительные числа. Каждое число заменяется на среднее арифметическое трех соседних чисел (т. е. чисел, расположенных в противоположных концах трех ребер, выходящих из этой вершины, причем эта замена производится одновременно во всех восьми вершинах куба). После 10 таких операций в каждой вершине оказалось начальное число. Верно ли, что все исходные числа равны между собой?*

3376. *Существует ли многогранник, имеющий 8 вершин и 12 ребер, образующих граф, изображенный на рисунке?*

Составители А. К. Ковальджи, Г. В. Кондаков

# Конкурс, посвященный 200-летию Великой Французской революции

3377. *Существует ли натуральное $n$, имеющее несколько*[1] *делителей в интервале* $\left(\sqrt{n}, \sqrt{n}+\sqrt[4]{n}+\frac{1}{2}\right)$?

Франсуа Ло Жакомо (Париж)

3378. *Рассмотрим последовательность $u_n$, заданную рекуррентным соотношением $u_{n+1}=u_n-e^{-1/u_n^2}$, $u_0>0$. Каков порядок $u_n$ при $n$, стремящемся к бесконечности*[2]?

Жерар Лаво (г. Месиил-Еснар)

[1] Т. е. более одного.— *Ред.*

[2] Найти в явном виде функцию $\varphi(n)$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\varphi(n)} = 1.\text{— } \textit{Ред.}$$

3379. *Доказать, что директриса параболы, касающейся трех сторон неравнобедренного треугольника и прямой, содержащей три центра окружностей Апполония этого треугольника, совпадает с прямой Эйлера этого треугольника.*

(Окружность Апполония треугольника — это окружность, проходящая через вершину треугольника и основания внутренней и внешней биссектрис, выходящих из этой вершины.)

Андре Англ (г. Лимож)

3380. *Для каждой точки $M$, расположенной в плоскости треугольника $ABC$, точки $A'$, $B'$, $C'$ — точки пересечения прямых $MA$, $MB$, $MC$ соответственно с прямыми $BC$, $CA$, $AB$. Определить точки $M$, для которых $AA'=BB'=CC'$*[3].

Доминик Ру (г. Лимож)

## Решения задач, помещенных в № 1 за 1989 г.

3981. *Какие числа вида 222...22 можно представить в виде либо суммы, либо разности квадратов натуральных чисел?*

Решение. Если числа $a$ и $b$ имеют разную четность, то $a^2+b^2$ и $a^2-b^2$ — числа нечетные и не могут иметь рассматриваемого вида.

Если $a$ и $b$ оба четные, то $a^2+b^2$ и $a^2-b^2$ делятся на 4 и также не могут иметь рассматриваемого вида. Если $a=2n-1$, $b=2k-1$, то $a^2-b^2$ делится на 4, а $a^2+b^2=4(n^2-n)+4(k^2-k)+2$, и поскольку числа $n^2-n$ и $k^2-k$ — четные, то левая часть при делении на 8 дает остаток 2. В то же время число рассматриваемого вида при делении на 8 дает остаток 2 только в случае, когда оно равно 2.

Таким образом, среди чисел рассматриваемого вида представимо в виде суммы квадратов только число $2=1^2+1^2$, и ни одно из этих чисел непредставимо в виде разности квадратов.

3282. *На прямой отмечены пять различных точек таким образом, что расстояние между каждыми двумя из них выражается натуральным числом, а расстояние между двумя крайними точками равно* 10. *Доказать, что среди всех отрезков с концами в данных точках найдутся два отрезка равной длины.*

---

[3] Мы даем дословный перевод слова «déterminer» — «определить». Так сказано в полученном редакцией условии. Поскольку решение этой задачи нам неизвестно, то неизвестен пока и ответ на вопрос о возможности построения требуемых точек с помощью циркуля и линейки. Будем считать, что ответ на этот вопрос входит в условие задачи.— *Ред.*

Решение. Пусть $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ — данные точки (слева направо). Нетрудно подсчитать, что существует всего 10 отрезков с концами в этих точках, и их длины являются натуральными числами, не большими 10. Если все эти длины различны, то среди них имеются все числа от 1 до 10.

Пусть, для определенности, $AD=9$, $DE=1$. Если $AC=8$, то $CD=1=DE$. Если $BD=8$, то $AB=1=DE$, и поэтому длину 8 может иметь только отрезок $BE$. Тогда $AB=2$, $BC\geqslant 3$, и если $BC=3$, то $AC=CE$, если $BC=4$, то $BC=CE$, если $BC=5$, то $CD=AB$, и если $BC=6$, то $CD=DE$. Полученное противоречие показывает, что хотя бы два из отрезков между данными точками имеют равную длину.

3283. *Можно ли покрыть прямоугольник размером $6\times 4$ квадратиками $2\times 2$ с вырезанным углом $1\times 1$ таким образом, чтобы никакие два квадратика не покрывали прямоугольник размером $3\times 2$?*

Решение. Требуемое покрытие существует (см. рис. 1).

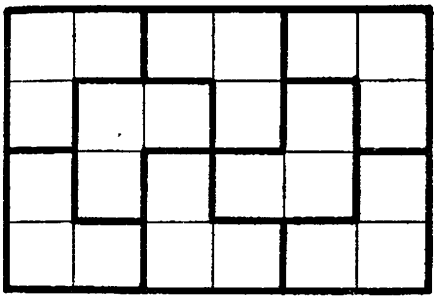


*Рис. 1*

3284. *Найти значение выражения*

$$\frac{x+y}{z+t}+\frac{y+z}{t+x}+\frac{z+t}{x+y}+\frac{t+x}{z+t},$$

*если*

$$\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}.$$

Решение. Прибавив ко всем четырем членам данного равенства по 1, получим равенство

$$\frac{x+y+z+t}{y+z+t}=\frac{x+y+z+t}{z+t+x}=\frac{x+y+z+t}{t+x+y}=\frac{x+y+z+t}{x+y+z}.$$

Если числитель дробей отличен от 0, то равны знаменатели, откуда легко следует, что $x=y=z=t$ и искомое выражение равно 4. Если же числитель равен 0, то это выражение равно —4.

3285. *Какие члены последовательности с общим числом*

$$a_n=[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$$

*делятся на 7?*

Решение. Перемножив под знаком корня первый множитель с четвертым, а второй с третьим и обозначив выражение $n^2+6n$ через $k$, представим выражение под корнем в виде $k^2+8k$, и поскольку

$$k^2+6k+9<k^2+8k<k^2+8k+16,$$

то $[\sqrt{k^2+8k}]=k+3$, и поэтому $a_n=n^2+6n+3=(n+3)^2-6$.

Следовательно, $a_n$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $(n+3)^2$ дает при делении на 7 остаток 6. Однако квадраты натуральных чисел при делении на 7 дают только остатки 0, 1, 4 и 2, и, следовательно, $a_n$ не делится на 7 ни при каком $n$.

3286. *Найти все члены последовательности с общим членом*

$$a_n = \sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)},$$

*являющиеся рациональными числами.*

Решение. В обозначениях решения задачи 3285 мы должны найти значения $k$, при которых число $k^2+8k$ является квадратом рационального, а в действительности — натурального числа, поскольку корень из натурального числа не может быть дробным. Если $k^2+8k=m^2$, то $(k+4)^2-m^2=16$. Но $k=n^2+6n\geqslant 7$, $k+4\geqslant 11$, и наименьшая возможная разность $(k+4)^2-m^2\geqslant 121-100=21$, и поэтому ни один член данной последовательности не является рациональным числом.

3287. *На сторонах $AB$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ взяты точки $M$ и $K$ так, что $AM=CK$, $P$ — произвольная точка на стороне $AD$. Прямые $MK$, $BP$ и $CP$ разбивают параллелограмм на три треугольника и три четырехугольника. Доказать, что площадь одного треугольника равна сумме площадей двух других треугольников, а площадь одного четырехугольника равна сумме площадей двух других четырехугольников.*

Решение. Докажем, что площадь треугольника $PEF$ равна сумме площадей треугольников $MBE$ и $CKF$ (рис. 2). Поскольку площадь треугольника $BPC$ равна половине площади параллелограмма и площадь трапеции $MBCK$ также равна половине площади параллелограмма, то

$$S_{PEF}+S_{BEFC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{MBE}+S_{BEFC}+S_{CKF}.$$

Значит, $S_{PEF}=S_{MBE}+S_{CKF}$, что и требовалось.

Теперь нетрудно доказать, что площадь четырехугольника $BEFC$ равна сумме площадей четырехугольников $AMEP$ и $PFKD$, поскольку

$$S_{BEFC}+S_{MBE}+S_{CKF}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{AMEP}+S_{PFKD}+S_{PEF},$$

и по доказанному $S_{MBE}+S_{CKF}=S_{PEF}$.

3288. *На сторонах $BC$ и $CD$ квадрата $ABCD$ взяты точки $M$ и $N$ так, что периметр треугольника $MNC$ равен половине периметра квадрата. Найти угол $MAN$.*

Решение. Докажем, что $MN$ касается окружности с центром в $A$, проходящей через точки $B$ и $D$ (рис. 3). Рассмотрим окружность, касающуюся $MN$ и продолжений $CM$ и $CN$ (вневписанную окружность треугольника $MNC$). Эта окружность касается прямых $CB$ и $CD$ в точках, расстояние от которых до $C$ равно половине периметра треугольника $MNC$, т. е. согласно условию — стороне квад-

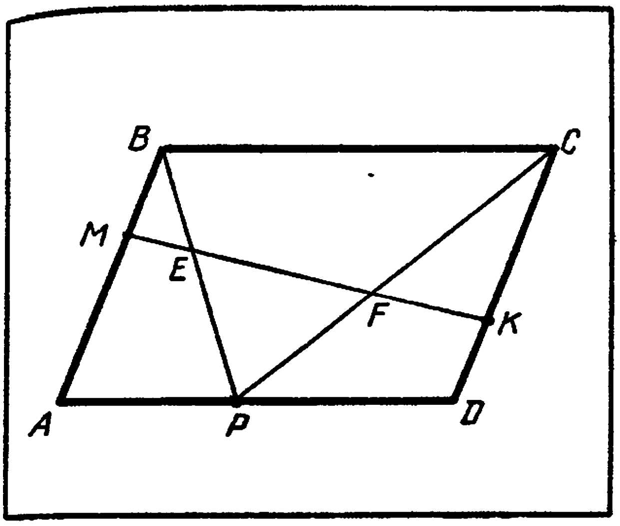



Рис. 2

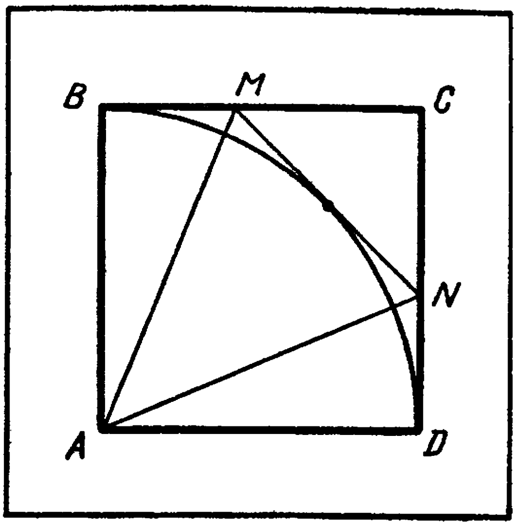



Рис. 3

рата. Значит, точки касания совпадают с вершинами квадрата $B$ и $D$, $A$ — центр этой окружности, $MA$ и $NA$ — биссектрисы углов $BMN$ и $MND$. Имеем

$$\angle MAN=180^\circ-\frac{1}{2}\angle BMN-\frac{1}{2}\angle MND=180^\circ-$$

$$-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle CMN)-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle CNM)=\frac{1}{2}(\angle CMN+$$

$$+\angle CNM)=45^\circ.$$

3289. *Решить систему уравнений*

$$(s-x_i)^{2k-1}=x_i\ (i=1,2,\ldots,n),$$

*где* $s=x_1+x_2+\ldots+x_n$ *($k$ — натуральное число).*

Решение. Заданную систему можно переписать в виде

$$\sqrt[2k-1]{x_1}+x_1=\sqrt[2k-1]{x_2}+x_2=\ldots=\sqrt[2k-1]{x_n}+x_n=s,$$

и поскольку функция $f(x)=\sqrt[2k-1]{x}+x$ возрастающая, то все значения $x_i$ равны между собой, $x_i=a$, и тогда $((n-1)a)^{2k-1}=a$, откуда следует, что $a=0$ или $a=\pm(n-1)^{\frac{1-2k}{2k-2}}$.

Поэтому система имеет два полученных решения при $n>1$ и одно решение $(0, 0, \ldots, 0)$ при $n=1$.

3290. *Пусть* $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$. *Вычислить значение выражения* $f(x)f(y)+f(y)f(z)+f(z)f(x)$, *если* $xy+yz+zx=1$.

Решение. Заметим сначала, что среди чисел $x$, $y$, $z$ нет попарно противоположных. Возьмем числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ таким образом, чтобы $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}\beta$, $z=\operatorname{tg}\gamma$. Тогда по условию

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\gamma=1,$$

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta),$$

откуда $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2+k\pi$, и поскольку $\frac{3\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}$, то $\alpha+\beta+\gamma=\pm\pi/2$.

Обратно, если $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\pm\pi/2$, то

$$\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\beta_1+(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\beta_1)\operatorname{tg}\gamma_1=\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\beta_1+(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\beta_1)\operatorname{ctg}(\alpha_1+\beta_1)=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\beta_1+\frac{(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\beta_1)(1-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\beta_1)}{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\beta_1}=1.$$

Далее,

$$f(x)=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

и поскольку

$$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{3\pi}{4}\mp\frac{\pi}{4},$$

то при $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$ эта сумма равна $\pi/2$, и

$$f(x)f(y)+f(y)f(z)+f(z)f(x)=1.$$

Если же $\alpha+\beta+\gamma=-\pi/2$, то значение заданного выражения не определяется однозначно: например, при $\alpha=\beta=\gamma=-\pi/6$, т. е. $x=y=z=-1/\sqrt{3}$, оно равно 9, а при $\alpha=\beta=-\pi/4$, $\gamma=0$, т. е. $x=y=-1$, $z=0$, оно равно $5+4\sqrt{2}$.

3291. *Найти числа $a$, $b$, $c$, если известно, что функция $f(x)=a\cos x+b\cos 2x+c\cos 3x$ является невозрастающей.*

Решение. Так как заданная функция является невозрастающей и четной, то при любом $x\geqslant 0$ выполняется неравенство $f(-x)\geqslant f(0)\geqslant f(x)$ и, следовательно, $f(x)=f(0)=a+b+c$. Ясно, что это равенство выполняется и при $x<0$, т. е. $f(x)$ — постоянная функция.

Так как $f(\pi)=-a+b-c$, $f(\pi/2)=-b$, $f(\pi/3)=a/2-b/2-c$, то $-a+b-c=-b=a/2-b/2-c=a+b+c$, откуда легко следует, что $a=b=c=0$.

3292. *Может ли число $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)2^k k!$ быть точной степенью натурального числа с показателем степени, большим 1?*

Решение. Так как

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)2^k k!=3\cdot2\cdot1+\sum_{k=2}^{n}(2k+1)2^k k!=4M+2,$$

это число делится на 2, но не делится на 4 и поэтому не может быть степенью натурального числа с показателем, большим 1.

3293. *Доказать, что если центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на отрезке, соединяющем центр описанной окружно-*

*сти и точку пересечения высот треугольника, то этот треугольник равнобедренный.*

Решение. Пусть $O$ и $H$ — центр описанной окружности и точка пересечения высот треугольника $ABC$, причем вершины треугольника обозначены так, что $AHCO$ — четырехугольник (рис. 4). Известно, что биссектриса угла треугольника образует равные углы с высотой и радиусом описанной окружности, выходящими из вершины этого угла. Значит, биссектриса угла $A$ делит отрезок $OH$ в отношении $AO/AH$, а биссектриса угла $C$ — в отношении $CO/CH$. По условию $AO/AH=CO/CH$. А поскольку $AO=CO$, то $AH=CH$. Теперь легко получить, что $AB=CB$.

3294. *На сторонах треугольника $ABC$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники $BAK$, $ACM$ и $CBP$. Доказать, что перпендикуляры, проведенные через середины отрезков $KM$, $MP$ и $PK$ соответственно к $BC$, $BA$ и $AC$, пересекаются в одной точке.*

Решение. Докажем, что каждый из рассматриваемых перпендикуляров проходит через центр окружности, проведенной через $A_1$, $B_1$ и $C_1$ — середины сторон треугольника $ABC$ (окружность девяти точек). Пусть $D$ — середина $KP$ (рис. 5). Поскольку $A_1C_1$ параллельна $AC$, то нам достаточно доказать равенство $C_1D=DA_1$. Пусть $E$ и $F$ — середины $KB$ и $BP$, докажем, что треугольники $DEC_1$ и $DFA_1$ равны. Имеем

$$DE=\frac{1}{2}BP=\frac{1}{2}PC=FA_1,\ EC_1=DF,\ \angle DEC_1=\angle DEK-120^\circ=$$
$$=\angle KBP-120^\circ=\angle DFA_1.$$

Таким образом, $DC_1=DA_1$ и построенный через $D$ перпендикуляр к $AC$ является серединым перпендикуляром отрезка $AC$.

3295. *Дан тетраэдр $ABCD$, $K$ — середина $AD$, $M$ — середина $BC$. На лучах $AM$ и $BK$ взяты точки $P$ и $Q$ так, что $AP/AM=$ $=BQ/BK$ и отрезок $PQ$ пересекает ребро $CD$. В каком отношении ребро $CD$ делится точкой пересечения с $PQ$?*

*Рис. 4*

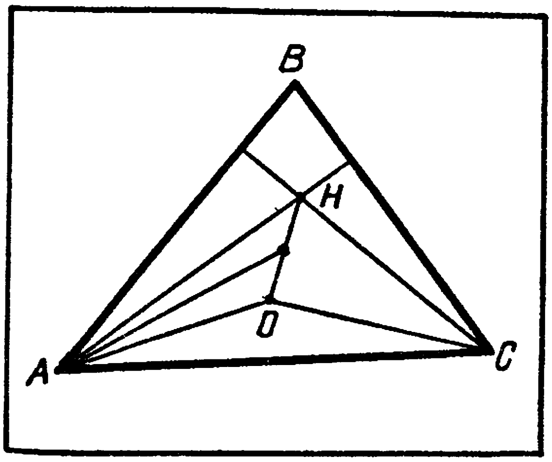
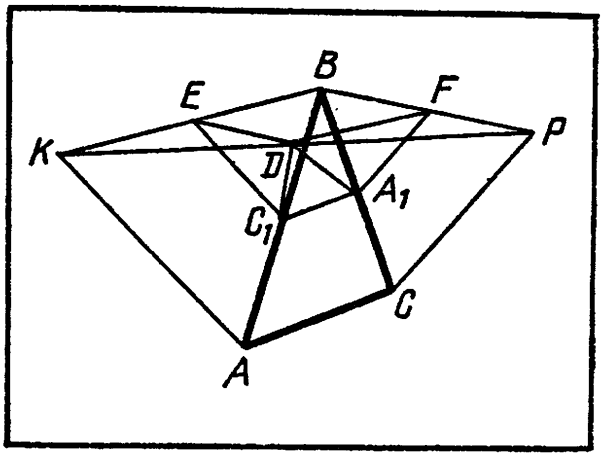



*Рис. 5*



Решение. Спроектируем заданную конфигурацию на плоскость, перпендикулярную $PQ$ (рис. 6, для простоты проекции точек обозначим так же, как и сами точки). Из того, что $AP/AM = BQ/BK$, следует параллельность $AB$ и $KM$. Пусть $E$ — середина $AC$; $ME$ параллельна $BA$ ($M$ — середина $BC$ по условию), значит, точки $K$, $M$ и $E$ — на одной прямой. Далее, $KE$ — средняя линия треугольника $DAC$, следовательно, $KE$ параллельна $DC$. Таким образом, $DBAC$ — трапеция, $DC$ и $AB$ — ее основания. $DBAP$ и $CABP$ — параллелограммы ($K$ — середина $AD$ и $AB \parallel DP$). Значит, $P$ — середина $DC$.

Итак, отрезок $PQ$ проходит через середину $DC$.

3296. ***Пусть $AB$ и $CD$ две стороны, принадлежащие различным основаниям правильной усеченной пирамиды. Доказать, что проекции $AB$ и $CD$ на прямую, проходящую через их середины, равны между собой.***

Решение. Пусть точки $B$ и $D$ получаются из точек $A$ и $C$ при соответствующем повороте вокруг оси пирамиды. Следовательно, $AC = BD$. Докажем, что из этого следует утверждение задачи. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, в котором $AC = BD$ (рис. 7). Пусть $M$, $K$ и $P$ — соответственно середины $AB$, $CD$ и $BC$. Из равенства $AC = BD$ следует, что $MP = PK$. Значит, точка $P$ проектируется в середину $MK$. Из этого можно сделать вывод, что проекции $MB$ и $CK$ на $MK$ равны, а значит, равны и проекции $AB$ и $CD$.

3297. ***Решить систему уравнений***

$$x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2} = x - yz, \quad y\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-x^2} = y - zx,$$

$$z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = z - xy.$$

Решение. Будем сначала считать, что $x$, $y$, $z$ все отличны от 0 и $\pm 1$. Тогда из первого уравнения имеем $x = \dfrac{yz}{1-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}$, и поскольку из второго и третьего уравнений следует, что $1 - \dfrac{zx}{y} > 0$, $1 - \dfrac{xy}{z} > 0$, то

Рис. 6

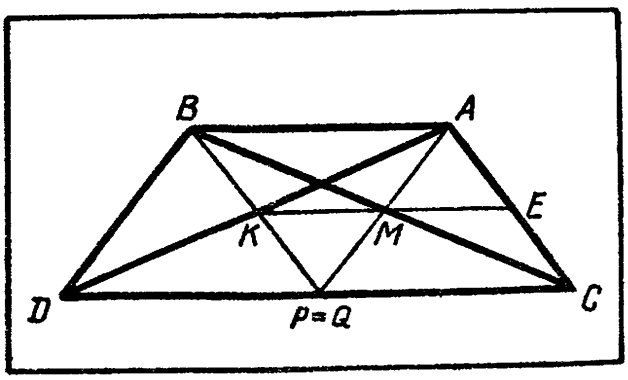
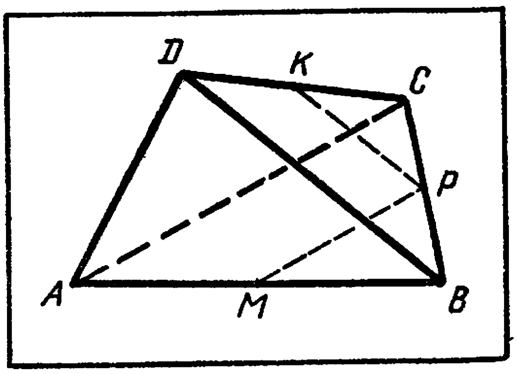



Рис. 7



$$\frac{z^2}{1-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}<1,\ \frac{y^2}{1-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}}<1,$$
$$z^2<1-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2},\ y^2<1-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2},$$
$$\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}<1-z^2,\ \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}<1-y^2,$$
$$\sqrt{1-y^2}<\sqrt{1-z^2},\ \sqrt{1-z^2}<\sqrt{1-y^2},$$

и мы приходим к противоречию.

Если $x=0$, то $yz=0$, откуда получаем решения $(0,\ 0,\ a)$ и $(0,\ a,\ 0)$, где $|a|\leqslant 1$, и аналогично получаем решения вида $(a,\ 0,\ 0)$.

Если $x=1$, то $y=z$, и любая тройка вида $(1,\ a,\ a)$, где $|a|\leqslant 1$, является решением; аналогично получаем решения вида $(a,\ 1,\ a)$ и $(a,\ a,\ 1)$.

Если $x=-1$, то $y=-z$, и любая тройка вида $(-1,\ a,\ -a)$, где $|a|\leqslant 1$, является решением; аналогично получаются решения вида $(a,\ -1,\ -a)$ и $(a,\ -a,\ -1)$.

3298. *Доказать, что при $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f>0$.*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\geqslant 3.$$

Решение. Обозначив левую часть неравенства через $s$, по неравенству Коши—Буняковского получим:

$$s(a(b+c)+b(c+d)+c(d+e)+d(e+f)+e(f+a)+f(a+b))\geqslant$$
$$\geqslant(a+b+c+d+e+f)^2,$$

или

$$s(\,(a+d)(b+e)+(b+e)(f+c)+(f+c)(a+d)\,)\geqslant(a+b+c+d+e+f)^2,$$

так что, положив $a+d=p,\ b+e=q,\ f+c=r$, будем иметь: $s(pq+qr+rp)\geqslant(p+q+r)^2$. Но

$$(p+q+r)^2=p^2+q^2+r^2+2(pq+qr+rp)\geqslant 3(pq+qr+rp),$$

так что $s\geqslant 3$.

3299. *Дан равнобедренный треугольник $ABC$, в котором $AB=BC$ и $\angle ABC=\alpha$; $K$ и $M$ две точки на прямой, проходящей через середины $AB$ и $BC$ такие, что $\angle KBM=90^\circ+\alpha/2$. Найти угол между прямыми $KA$ и $CM$ (отрезки $KA$ и $CM$ не пересекаются).*

Решение. Пусть $E$ и $D$ — середины $AB$ и $BC$, $P$ — точка пересечения прямых $KA$ и $MC$ (рис. 8, *а*). Нетрудно найти, что $\angle KEA=\angle MDC=90^\circ-\alpha/2$.

Приложим треугольники $KBA$ и $MBC$ друг к другу сторонами $AB$ и $BC$ (рис. 8, *б*; для удобства точки, соответствующие $A$, $C$, $K$ и т. д., обозначим теми же буквами со штрихами). Опишем около треугольника $K'BM'$ (рис. 8, *б*) окружность и обозначим через $A_1$

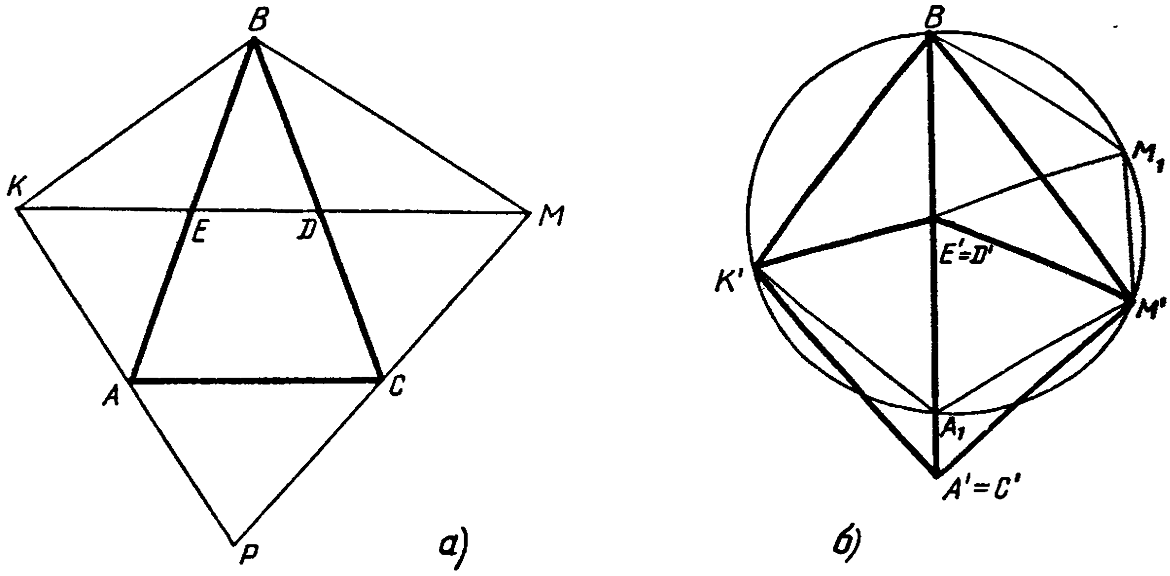



*Рис. 8*

точку ее пересечения с прямой $BE'$. Докажем, что $A_1$ совпадает с $A'(=C')$. Имеем $\angle K'BM'=90°+\alpha/2-\alpha=90°-\alpha/2=\angle K'E'A_1 = \angle M'E'A_1$. Пусть $K'E'$ вторично пересекает окружность в точке $M_1$. Угол $K'E'A_1$ измеряется полусуммой дуг $K'A_1$ и $BM_1$, а угол $K'BM'$ — дугой $K'A_1M'$ или полусуммой дуг $K'A_1$ и $A_1M'$. Из равенства углов $K'E'A_1$ и $K'BM'$ следует равенство дуг $A_1M'$ и $BM_1$. Значит, $M'M_1$ и $BA_1$ параллельны, а треугольники $BM_1E'$ и $A_1M'E'$ равны ($BM_1=M'A_1$, $\angle M_1BE'=\angle M'A_1E'$, $\angle M_1E'B=\angle M'E'A_1$). Следовательно, $BE'=E'A_1$ и точки $A_1$, $A'$ и $C'$ совпадают. Из этого следует, что сумма углов $KAB$ и $BCM$ равна $\angle K'A_1M'=90°+\alpha/2$.

Далее легко находим, что угол между $KA$ и $MC$ равен $90°-\alpha/2$. ($\angle APC=180°-\angle PAC-\angle PCA=\angle KAC+\angle MCA-180°=\angle KAB+\angle BAC+\angle ACB+\angle BCM-180°=90°+\alpha/2+2(90°-\alpha/2)-180°=90°-\alpha/2$.)

3300. *Доказать, что при произвольном $x>0$ имеет место неравенство* $(2x-1)a^2+\left(\frac{2}{x}-1\right)b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$, *где $a$, $b$, $c$ — стороны треугольника, $S$ — его площадь.*

Решение. Будем считать известным неравенство

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}.$$

Возьмем на сторонах $CB$ и $CA$ треугольника $ABC$ точки $A'$ и $B'$ соответственно так, что $CA'=\alpha CB=\alpha a$, $CB'=\beta AC=\beta b$ (рис. 9), найдем $B'C'$ и применим

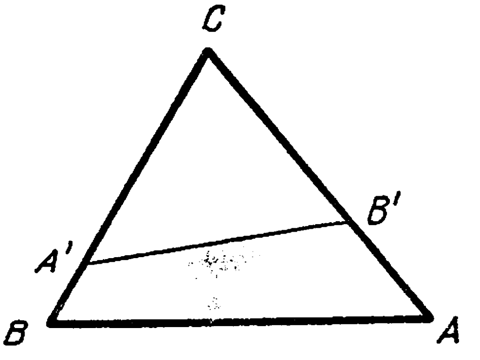



*Рис. 9*

к треугольнику $AB'C'$ указанное неравенство.

Имеем:

$$S'=S_{AB'C'}=\alpha\beta S,\ (B'C')^2=\alpha^2a^2+\beta^2b^2-2\alpha\beta ba\cos A=$$

$$=\alpha^2a^2+\beta^2b^2-2\alpha\beta ba\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}\right)=$$

$$=(\alpha^2-\alpha\beta)a^2+(\beta^2-\alpha\beta)b^2+\alpha\beta c^2;$$

$$(CA')^2+(CB')^2+(A'B')^2\geqslant 4S_{CA'B'}\sqrt{3};$$

$$\alpha^2a^2+\beta^2b^2+(\alpha^2-\alpha\beta)a^2+(\beta^2-\alpha\beta)b^2+\alpha\beta c^2\geqslant 4\alpha\beta S\sqrt{3};$$

$$(2\alpha^2-\alpha\beta)a^2+(2\beta^2-\alpha\beta)b^2+\alpha\beta c^2\geqslant 4\alpha\beta S\sqrt{3};$$

Разделив обе части неравенства на $\alpha\beta$ и обозначив $\alpha/\beta=x$, получим требуемое неравенство (ввиду произвольности $\alpha$ и $\beta$).

## Замечания к решениям задач

Зачада 3281 оказалась достаточно легкой, и ошибки в решениях носили в основном случайный характер — авторы «пропускали» число 2. Надо отметить также, что речь в задаче идет о представлении рассматриваемых чисел в виде суммы именно двух квадратов: без этого условия задача становится бессодержательной, поскольку каждое натуральное число $n$ является суммой квадратов $n$ единиц. Не вызвала особых трудностей и задача 3282, хотя иногда уровень убедительности рассуждений был недостаточным.

В решениях задачи 3284 типичной и, к сожалению, массовой была ошибка, состоящая в том, что упускался из внимания случай $x+y+z+t=0$, существенно влияющий на решение задачи. В решениях задачи 3289 часто терялось нулевое решение. Надо сказать, что некоторые читатели решили эту задачу с полным исследованием, касающимся «малых» значений чисел $k$ и $n$. Мы же привели решение, не обращая внимание на соответствующие тонкости, но при желании это можно легко поправить.

Как показывает опубликованное в журнале решение задачи 3290, при некоторых, весьма широких ограничениях на $x$, $y$, $z$ (например, при $x>0$, $y>0$, $z>0$) рассматриваемое в задаче выражение равно 1, но вместе с тем при отсутствии всяких ограничений, в общем виде его значение не определяется однозначно. В этом смысле задача имела исследовательский характер. Однако во многих решениях были допущены логические ошибки, из-за которых одна из сторон задачи осталась нераскрытой.

Весьма интересной, на наш взгляд, является задача 3297: после возведения в квадрат первого (или любого другого) уравнения системы, казалось бы явно несимметричного, получается уравнение, в которое все переменные входят симметрично. Но отсюда возникает мысль, что все эти уравнения равносильны, и система сводится к одному уравнению, однако и это оказывается неверным, и остальные уравнения необходимы для отсева лишних решений после возведения в квадрат.

Все геометрические задачи на этот раз оказались достаточно простыми и больших затруднений у решателей не вызвали. Тот факт, что задача 3287 оказалась зачтенной не у всех, приславших решения, явился следствием невнимательности некоторых читателей — они рассматривали не те треугольники. Несмотря на простоту, эта задача весьма поучительна и вполне может быть использована во внеклассной работе, в частности на школьной олимпиаде.

К задаче 3288 было прислано много вычислительных решений. Мы получили также несколько геометрических решений, отличных от приведенного в этом номере. Например, такое: повернем треугольник $ABM$ вокруг вершины $A$ на $90°$ так, чтобы точка $B$ перешла в $D$; тогда равными окажутся треугольники $MAB$ и $DAM'$, где $M'$ — образ точки $M$ при указанном повороте, и т. д.

Задача 3293 допускает более «профессиональную» формулировку: «Если центр вписанной окружности лежит на прямой Эйлера треугольника, то...» В таком виде ее решение, формально не усложняясь, требует определенной эрудиции, несколько выходящей за рамки школьной программы.

Сразу же бросается в глаза сходство задачи 3294 и по формулировке, и по решению с задачей 3274. Поскольку авторы этих задач проживают в разных странах, то можно говорить о наличии общих тенденций, заключающихся, в частности, в сохранении интереса к классическим геометрическим конфигурациям. (Напомним, что рассматриваемая в условии этих задач конфигурация, по утверждению некоторых историков, интересовала Наполеона.)

Самыми трудными, пожалуй, оказались две стереометрические задачи 3295 и 3296. В нашем решении задачи 3295 мы использовали «метод проектирования». В данном случае имеет место стандартная ситуация, когда этот метод хорошо «работает» — в условии рассматриваются отношения отрезков, расположенных на одной прямой.

При решении задачи 3296 мы воспользовались следующим условием: для того чтобы проекции $KE$ и $MD$ на прямую $KM$ были равны, достаточно, чтобы середина $ED$ проектировалась в середину $KM$. Чтобы это условие стало необходимым и достаточным, его следует пополнить следующей альтернативой — «или чтобы проекция $ED$ на прямую $KM$ равнялась $KM$».

Легче обычного оказались обе конкурсные задачи. Многие читатели нашли существенно более короткие решения задачи 3299, чем приведенное нами авторское. Мы решили все же обратить внимание учителей на решение автора, так как в нем есть одна красивая и новая идея. Пусть она по-настоящему «не выстрелила» в этот раз, но познакомиться с нею полезно.

То же можно сказать и о задаче 3300. Стандартное применение теоремы о среднем приводит к цели мгновенно. В то же время приведенное нами решение поучительно в ином плане — оно хорошо показывает один стандартный метод — авторы называют его «метод трансформаций»,— с помощью которого можно не только доказывать, но и — главное — генерировать подобного рода неравенства.

# Сводка решений задач по № 1 за 1989 г.

Аббасов З. Д. (АзССР) — 84, 97, 98, 00. Агаев М. (АзССР, г. Ленкорань) — 81, 84, 86, 88. Акопян А. М. (Ереван) — 81—89, 91, 92, 94, 96—00. Акопян В. М. (Ереван) — 97—00. Аляев А. В. (Пензенская обл.) — 81, 86—88, 96, 99. Арзикулов Ф. Н. (Приморский край, г. Спасск-Дальний) — 82, 85—88, 00. Бевз Г. П. (Киев) — 81—83, 85—89, 91—96, 99, 00. Бедный Г. Г. (Житомирская обл., г. Бердичев) — 81, 82, 84, 86—88. Бочев Р. Г. (Болгария, г. Враца) — 81—89, 91—00. Василев Ц. С. (Болгария, София) — 81—89, 91, 92, 99. Вахитов Р. Х. (г. Стерлитамак) — 81—89, 91, 92, 97. Гаджиев С. С. (Дагестанская АССР) — 97, 99, 00. Гемуев А. А. (Нальчик) — 81—83, 88, 98, 00. Герег И. А. (МССР) — 97—00. Гольберг Е. М. (Ленинград) — 97—00. Гордон В. А. (Чита) — 81, 84—94, 99, 00. Грачикова К. С. (Московская обл.) — 81—84. Джаббаров М. Б. (АзССР, г. Саатлы) — 81, 82, 88, 98. Егоров П. В. (Рязань) — 81—84, 86—90, 92, 93, 00. Ертушов А. Н. (Горьковская обл.) — 82—84, 88. Зассеев И. С. (г. Цхинвали) — 81, 82, 86, 92, 93. Зискинд Л. Е. (г. Винница) — 81—88, 92, 93, 00. Зубилин Н. И. (Орловская обл.) — 82, 86—88, 98. Извекова Т. М. (Пятигорск) — 82, 83, 84, 87. Ильясов М. Н. (Павлодар) — 81—89, 91, 92, 96, 98—00. Казарян Г. Я. (Тбилиси) — 81—92, 00. Ким Н. А. (Ташкент) — 81—89, 91. Корнилов А. В. (Ростов-на-Дону) — 81—83, 85, 86, 98. Кременецкий Л. М. (Московская обл.) — 81—83, 89, 91, 92. Курганов Т. К. (Ташкентская обл., г. Чирчик) — 81—83, 85—91, 00. Курило И. А. (Харьковская обл.) — 81—83, 85—89, 93—95, 99, 00. Левко М. С. (Львовская обл.) — 81, 82, 86, 87, 91. Лотоцкий Я. (Тернополь) — 85, 86, 89, 91—93. Макаров М. Ф. (Орловская обл.) — 81—84, 86. Набиев Д. А. (АзССР, г. Варташен) — 81, 82, 85, 86, 88, 91. Ониани Г. (Кутаиси) — 81—83, 85, 86, 92, 99, 00. Оренштейн П. М. (Евпатория) — 97—00. Повелий В. И. (Ровенская обл.) — 84, 87, 88, 90, 98—00. Ручкин Д. Д. (Марийская АССР) — 82, 84, 85, 88, 98. Сафаралиев М. (Нахичеванская АССР) — 85—87, 91. Седракян Н. М. (Ереван) — 97—00. Симеонов А. А. (Болгария, г. Своге) — 81, 84—00. Суховой М. Т. (Новосибирск) — 81, 83, 86—88. Ткачев В. Ф. (Воронежская обл.) — 81, 83, 85, 90, 93, 97—00. Трофимчук Ю. В. (Винницкая обл., г. Калиновка) — 81—84, 92. Трошин В. В. (Волгоградская обл.) — 82, 83, 86, 91. Туйтеев К. (Каракалпакская АССР, г. Ходжейли) — 81, 83—86. Тухтабаев М. (Наманганская обл.) — 89—92, 94—00. Хайруллаев Р. (Новосибирск) — 81—94, 96, 98, 99. Ходжаниязова Г. З. (Ташаузская обл.) — 81, 85, 86, 00. Цакоев Б. М. (Рязанская обл.) — 81—83, 86—90, 92, 99, 00. Цхай Т. Т. (Андижан) — 81—89, 92—97, 99, 00. Юсупов С. (Хорезмская обл.) — 81—91, 99, 00.

*Математические кружки:* индустриально-технологического техникума г. Иджевана АрмССР (рук. З. А. Алавердян) — 85, 86, 91, 00; «Юные математики» Моранской восьмилетней шк. Масаллинского р-на АзССР (рук. Ч. Ш. Алиев) — 81, 83, 86—88; математического фак. Андижанского пединститута (рук. А. Ахмадалиев) — 81, 83, 86, 88, 91, 92, 00; 3-й шк. г. Мурена МНР (рук. Ц. Батсайхан) — 81, 82, 84, 88; «Агат» 6-й шк. г. Цхинвали (рук. Э. А. Бекоев) — 81, 84, 86—89, 97, 99, 00; «Квант» республиканского Дворца пионеров Алма-Аты (рук. Г. В. Белянская) — 81—89; 119-й шк. Киева (рук. Б. Д. Бенюхис) — 81—86, 88; шк.-интерната г. Марнеули ГССР (рук. М. М. Гаджиев) — 81, 82, 88, 89, 97. Ашаги-Мюлькюменской шк. Таузского р-на АзССР (рук. Р. Л. Гулиев) — 87—89, 00; 2-й шк. Ханкинского р-на Хорезмской обл. (рук. Ю. Джуманиязов) — 81, 87, 89, 00; 8-х классов 6-й шк. г. Винницы (рук. Е. А. Кац) — 81—89, 93, 94, 99, 00; 93-й шк. Киева (рук. М. Л. Кобозев) — 82, 83, 85—88, 97—00; 79-й шк. Киева (рук. В. Е. Куценок) — 81—83, 85—89, 91—97, 99, 00; «Гяндж риязийятчы» Дамирлинской восьмилетней азербайджанской шк. Болнисского р-на ГССР (рук. А. Д. Османов) — 81—84, 87, 88; подготовительного фак. Дагестанского мединститута (рук. Р. Р. Рабаданов) — 81—84, 87—89, 91; 2-й шк. г. Мархамат Андижанской обл. (рук. О. Сатторов) — 81, 87—89, 99, 00; «Коллективный ученик» Новомакинской шк. Сулейман-Стальского р-на Дагестанской АССР (рук. Л. Т. Тагирбеков) — 82, 84, 87—89; Боблихской шк. № 2 Дагестанской АССР (рук. У. Д. Таймасханов) — 81—83, 87, 88; 51-й шк. Киева (рук. Б. Н. Школьник) — 82—91; 61-й шк. Киева (рук. М. С. Якир) — 81—83, 85—88.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КАЛЕНДАРЬ НА 1989/90 УЧЕБНЫЙ ГОД

### Ноябрь

**7 ноября** — 70 лет со дня рождения советского математика Виктора Сильвестровича Чарина. Родился в с. Поелдино, ныне Коми АССР. Окончил Казанский университет (1941). Доктор физико-математических наук (1963), профессор (1965). В 1951—1965 гг. работал в Уральском университете, с 1965 г.— в Киевском университете. Основные труды по алгебре (см.: История отечественной математики, т. 3—4).

**20 ноября** — 140 лет со дня рождения известного русского историка математики и педагога Виктора Викторовича Бобынина (1849—1919). Родился в дер. Шили, ныне Смоленской области. В 1872 г. окончил Московский университет, в 1882 г. начал читать в нем курс истории математики. Основные работы относятся к истории отечественной математики («Очерки истории развития физико-математических знаний в России», т. 1—2, 1885—1888, «Русская физико-математическая библиография», т. 1—3, 1886—1900). Большую роль в популяризации историко-математических знаний сыграл издаваемый им в 1885—1894 гг. журнал «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем». Ему принадлежит раздел «Элементарная геометрия во второй половине 18 столетия» в четвертом томе монографии «История математики» М. Кантора (см.: Математический энциклопедический словарь. М., 1988).

**26 ноября** — 70 лет со дня рождения советского математика и механика Абдельхака Сафиулловича Галиуллина. Окончил Военно-воздушную академию им. Н. Е. Жуковского (1944), доктор технических наук (1959), профессор (1960). В 1946—1961 гг. работал в Казанском авиационном институте, с 1961 г. работает в Университете дружбы народов им. Патриса Лумумбы. Основные труды относятся к аналитической и прикладной механике и теории дифференциальных уравнений. Автор книг: «Методы решения алгебраических задач динамики» (М., 1986); «Аналитическая динамика: Для университетов» (М., 1989). Заслуженный деятель науки и техники РСФСР (1974). Награжден двумя орденами Трудового Красного Знамени, орденом Отечественной войны и медалями (см.: Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: Биографический словарь-справочник. Киев, 1987).

**27 ноября** — 80 лет со дня рождения советского математика и логика Анатолия Ивановича Мальцева (1909—1967). Родился в пос. Мишеронском Московской области. Окончил МГУ (1931). Роботал в Ивановском пединституте (с 1943 г.— профессор), в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР, в Сибирском отделении АН СССР и в Новосибирском университете. Академик АН СССР (1958). Получил фундаментальные результаты в теории групп, теории колец и линейных алгебр, топологической алгебре, теории алгоритмов. Основатель Сибирского математического общества и первый его президент. Заслуженный деятель науки РСФСР (1956). Ленинская премия (1964). Государственная премия СССР (1946) (см.: Математический энциклопедический словарь. М., 1988).

**27 ноября** — 60 лет со дня рождения советского математика Витаутаса Антоновича Статулявичуса. Родился в дер. Бикунай (ЛитССР). Окончил Вильнюсский университет (1954). Доктор физико-математических наук (1967), профессор (1968), академик АН ЛитССР (1972). С 1957 г. работал в Институте физики и математики АН ЛитССР, затем директором Института математики и кибернетики АН ЛитССР. В Вильнюсском университете ведет курсы теории вероятностей и математической статистики. Основные труды по теории вероятностей и математической статистике. Создал методы асимптотического анализа распределения сумм зависимых случайных величин, связанных в цепь Маркова, исследовал асимптотические свойства некоторых статистик случайных процессов. Заслуженный деятель науки ЛитССР. Премия им. А. А. Маркова (1971; совместно с В. М. Золотаревым и В. В. Петровым). Государственная премия ЛитССР (1987). Награжден орденом Трудового Красного Знамени (см.: Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: Биографический словарь-справочник. Киев, 1987).

**Декабрь**

**1 декабря** — 80 лет со дня рождения советского математика Виктора Иосифовича Левина (1909—1986). Родился в Могилеве. Окончил Высшее техническое училище в Берлине (1932), доктор физико-математических наук, профессор (1939). Работал в вузах Москвы, с 1962 г.— в МГПИ им. В. И. Ленина. Труды относятся к теории функций, математической физике и истории математики. Им написан ряд хорошо зарекомендовавших себя учебников и учебных пособий для вузов, выполнен ряд переводов оригинальных математических изданий (см.: Успехи математических наук. 1970. 25. № 1).

**8 декабря** — 70 лет со дня рождения советского кибернетика и математика Екатерины Логвиновны Ющенко (Рвачевой). Родилась в Чигирине (Черкасская обл.). Окончила Среднеазиатский университет (1942), доктор физико-математических наук (1966), профессор (1969), член-корреспондент АН УССР (1976). Работала в Институте математики АН УССР и в его Львовском отделении, с 1957 г. работает в Институте кибернетики им. М. В. Глушкова, с 1953 г.— также в Киевском университете. Основные труды по теории вероятностей, теории и созданию алгоритмических языков и языков программирования, теории языков процессов, методам построения автоматизированных систем обработки данных. Государственная премия УССР (1978). Премия Совмина СССР (1984). Премия им. В. М. Глушкова АН УССР (1985; совместно с Ю. В. Капитоновой и А. А. Летичевским) (см.: Боголюбов А. Н. Математики, механики: Биографический справочник. Киев, 1983).

**15 декабря** — 60 лет со дня рождения советского математика Юрия Васильевича Прохорова. Родился в Москве. Окончил МГУ (1949). Ученик А. Н. Колмогорова. Доктор физико-математических наук (1956), профессор (1958), академик АН СССР (1972). С 1949 г. работает в Математическом институте АН СССР, с 1952 г.— также в МГУ. Основные труды по теории вероятностей и математической статистике. Автор учебников и учебных пособий по теории вероятностей и математической статистике. Член Главной редакции 3-го издания БСЭ, зам. главного редактора «Математической энциклопедии», главный редактор «Математического энциклопедического словаря» и журнала «Теория вероятностей и ее применения» (1967—1987). Ю. В. Прохоров — вице-президент Международного математического союза (1978—1983), член Международного статистического института (1965), член общества Бернулли (1965, председатель с 1989). Ленинская премия (1970; совместно с И. А. Ибрагимовым, Ю. В. Линником и Ю. А. Розановым) (см.: Математический энциклопедический словарь. М., 1988).

**16 декабря** — 140 лет со дня рождения венгерского математика Дьюлы Кёнига (1849—1914). Работал в Будапеште. Основные труды по теории множеств (теорема Кёнига), анализу и алгебре. Независимо от Т. Стилтьеса пришел к обобщению понятия интеграла. Одно из неравенств называется неравенством Кёнига—Журдена—Цермело. Д. Кёниг — один из основателей современной алгебры (см.: Боголюбов А. Н. Математики и механики: Биографический справочник. Киев, 1983).

**22 декабря** — 120 лет со дня рождения советского математика Дмитрия Федоровича Егорова (1869—1931). Родился в Москве. Окончил Московский университет (1891), профессор (1903), член-корреспондент АН СССР (1924), почетный член АН СССР (1929). С 1893 г. работал в Московском университете. Основные труды по дифференциальной геометрии, теории интегральных уравнений, вариационному исчислению и теории функций действительного переменного. Теорема Егорова (1911) о последовательности измеримых функций, почти всюду сходящихся на данном отрезке, и другие результаты, полученные совместно с учеником Н. Н. Лузиным, положили начало знаменитой московской школе теории функций действительного переменного. Через его семинары прошли все крупные математики, воспитывавшиеся в то время в Московском университете. Учениками Д. Ф. Егорова являются такие известные математики, как Н. Н. Лузин, И. И. Привалов, В. В. Степанов, В. В. Голубев, И. Г. Петровский и др. Президент Московского математического общества (1922—1931). Заслуженный деятель науки РСФСР (см.: Бородин А. И. Советские математики. 2-е изд. Киев; Донецк, 1982).

**31 декабря** — 90 лет со дня рождения советского математика Лазаря Ароновича Люстерника (1899—1981). Родился в г. Здуньска Воля (Польша). В 1922 г. окончил МГУ. Основные достижения Л. А. Люстерника относятся к дифференциальной геометрии и вариационному исчислению, в которых он с успехом применял топологические методы. В современной математике «топологизация» превратилась в исключительно плодотворный метод исследования, и Л. А. Люстерника можно считать одним из тех математиков, которые способствовали его четкому выявлению. Для учителя математики большой интерес представляют следующие его книги: «Кратчайшие линии. Вариационные задачи» (М., 1955), «Выпуклые фигуры и многогранники» (М., 1956), а также «Тригонометрия» (М., 1957), написанная в соавторстве с А. Ф. Бермантом (см.: Успехи математических наук. 1982. 37. № 1).

А. И. Бородин, М. В. Каменская
(г. Донецк)

## В издательстве «Педагогика» вышли книги:

**Вульфов Б. З., Иванов В. Д. Комсомол. Учитель. Ученик:** Вопросы, ответы, размышления.— 144 с.— 30 к., 50 000 экз.

**Левшина И. С. Подросток и экран.**— 176 с.— (Педагогика — родителям).— 45 к., 100 000 экз.

# Книга по арифметике Яна Видмана

**(Продолжение.
Начало см. на с. 2 обложки)**

Учебник Яна Видмана написан под влиянием первой немецкой печатной арифметики (1482), составленной учеником Региомонтана Ульрихом Вагнером. Книги Вагнера и Видмана были коммерческими, т. е. обращались к широкой читательской аудитории, в отличие от предшествовавших им латинских трактатов.

Учебник Видмана состоит из трех разделов. Первый посвящен вычислениям с целыми и дробными числами. Объясняется, в частности, как производить вычитание, если цифра вычитаемого больше цифры соответствующего разряда уменьшаемого. В этом случае рекомендуется прибавить к уменьшаемому разность между десятью и рассматриваемым разрядом вычитаемого, а следующий разряд вычитаемого увеличить на 1. Например, чтобы вычесть 7 из 15, нужно к 5 прибавить 3 (разность между 10 и 7), получим младший разряд ответа; к следующему разряду вычитаемого (к 0) прибавить 1 и вычесть из соответствующего разряда уменьшаемого (из 1). Ответ — 8. Сейчас такое вычитание мы проводим «занимая десяток» в следующем разряде.

В первом разделе приводятся также правила нахождения суммы арифметической и геометрической прогрессий, приближенного вычисления квадратного и кубического корней с точностью до целых.

Во втором разделе изложена теория отношений, приведены многочисленные задачи с решениями. Например, спрашивается, за какое время сделают некоторую работу лев, волк и собака, если, работая один, лев выполнит ее за 1 час, волк — за 4 часа, собака — за 6 часов? Решение: перемножить 1, 4 и 6 (получим 24); сложить 1/1 часть от 24, 1/4 от 24 и 1/6 от 24 (получим 34); разделить 24 на 34; ответ — 24/34 часа, или 42 и 6/17 мин. Автор рассматривает эту задачу как совершенно ординарную, его указания настолько скупы и «рецептурны», что заставляют вспомнить манеру толкования решений у древних египтян. По ним весьма трудно понять общий принцип решения задач определенного типа. Это говорит о том, как долго и непросто развивалась методическая мысль.

В третьем разделе книги излагается практическая геометрия. Во всем сочинении просматриваются и зачатки алгебры. Это видится не только в появлении знаков «+» и «—», но и в использовании обозначений для неизвестного. В этом Видман следовал за своими немецкими предшественниками. Например, он был знаком со старейшей немецкой рукописью «Немецкая алгебра». В ней впервые встречается алгебраическая символика, ставшая впоследствии распространенной у немецких алгебраистов, в частности название «коссе» для алгебры. Это свидетельствует о том, что немецкая алгебра итальянского происхождения, поскольку итальянские алгебраисты неизвестное называли cosa — вещь (вещью неизвестное называли и в арабских рукописях).

«Арифметика» Видмана получила широкое распространение, она несколько раз переиздавалась, была хорошо известна косситам — так называли немецких алгебраистов. Похожие названия впоследствии давали своим трудам некоторые известные косситы, например Генрих Шрейбер из Эрфурта и Рудольф Христоф. Они употребляли знаки «+» и «—» более последовательно, чем Видман. Таким образом, немецкие косситы внесли существенный вклад в развитие алгебры и выработку современной алгебраической символики.

В XIII—XVI вв. накапливались алгебраические символы и традиции математических обозначений, которые в XVII в. были систематизированы, упрощены. У Р. Декарта они приняли практически современный облик.

З. А. Кузичева (Москва)

## В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «ПЕДАГОГИКА» ВЫШЛИ КНИГИ:

**Крупская Н. К. Воспитание молодежи в ленинском духе** / Вступ. статья В. В. Шинкаренко.— 320 с.— (в пер.): 1 р. 10 к., 30 000 экз.

**Литвинова Н. П. Образование в условиях интенсификации экономики.**— 192 с.— 80 к., 12 000 экз.

**Литература по педагогическим наукам и народному образованию.** Вып. 1(150). 1988 г.: Текущий библиогр. указ. / Гос. науч. пед. б-ка им. К. Д. Ушинского АПН СССР.— 112 с.— 50 к., 16 950 экз.

**Менчинская Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника:** Избранные психологические труды.— 224 с.— (Труды д. чл. и чл.-кор. АПН СССР).— (в пер.): 1 р. 80 к. 10 000 экз.

**Педагогический поиск** / Сост. И. Н. Баженова.— 3-е изд., с испр. и доп.— 560 с.: ил.— (в пер.): 1 р. 60 к. 300 000 экз. (1-й з-д 1—100 000 экз.).

**Содержание трудового воспитания школьников** / Под ред. А. Я. Журкиной, И. И. Зарецкой.— 144 с.— (Б-ка учителя и воспитателя).— 40 к., 65 000 экз.

**Способности и склонности: Комплексные исследования** / Под ред. Э. А. Голубевой.— 200 с.: ил.— 75 к., 12 000 экз.

**Сухомлинский В. А. Как воспитать настоящего челевека:** (Этика коммунистического вспитания). Педагогическое наследие / Сост. О. В. Сухомлинская.— 288 с.— (Б-ка учителя).— (в пер.): 1 р. 30 к., 475 000 экз. (1-й завод 1—100 000 экз.). Подписное.

**Учитель советской школы:** Рек. библиогр. указ. / Сост. А. В. Жилина.— 48 с.— 15 к., 67 000 экз.

**Очерки истории школы и педагогической мысли народов СССР с древнейших времен до конца XVII в.** / Отв. ред. Э. Д. Днепров.— 480 с.— (в пер.): 3 р. 20 к., 14 000 экз.

**Резерв успеха — творчество** / Под ред. Г. Нойнера, В. Калвейта, Х. Клайна: Пер. с нем.— 120 с.— 60 к., 16 000 экз.

**Рябцева С. Л. Дети восьмидесятых: Дневник учителя.**— 240 с.: ил.— 60 к., 60 000 экз.

**Соловейчик С. Л. Воспитание по Иванову.**— 352 с.— (в пер.): 1 р. 10 к., 70 000 экз.

**Яковлев Н. Н. Война и мир по-американски.**— 128 с.: ил.— 55 к., 200 000 экз.

# О современных тенденциях в методике преподавания математики

А. Я. Блох, Р. С. Черкасов (Москва)

Статья посвящается памяти замечательного педагога-математика, видного деятеля и одного из инициаторов реформы математического образования, почетного председателя Международной комиссии по изучению и совершенствованию математического образования, почетного доктора Ягеллонского университета Анны Софии Крыговской (1904—1988).

Идея гуманизации образования получает все большее признание и распространение [1, 2]. Использование фактов материальной и духовной культуры и гуманизации школьной математики также не только стало предметом обсуждения широких кругов математической общественности, оно все чаще входит в практику преподавания. Нередко, однако, приходится сталкиваться с недооценкой возможностей школьного курса математики в реализации этой идеи, а иногда — и с подменой ее узко понимаемой гуманитаризацией. В поисках ориентиров, позволяющих подойти к решению этой важнейшей новой методической проблемы, нельзя забывать, что в отечественной методике математики накоплен известный опыт осуществления гуманизации образования [3, 4]. Есть такой опыт и в зарубежной школе. Эта проблема стала темой оживленных обсуждений на ряде международных симпозиумов, проведенных в 80-е гг. Для ознакомления с итогами таких обсуждений представляет несомненный интерес один из номеров польского журнала по методике математики [5], в котором опубликованы доклады участников конференции в Кракове в октябре 1984 г., посвященной 80-летию С. Крыговской. Большинство статей этого юбилейного издания сохраняют преемственность в подходах к трактовке проблемы гуманизации математического образования, свойственных С. Крыговской и изложенных во многих ее исследованиях, в частности — в фундаментальной монографии [6].

На конференции выступили видные методисты-математики Т. Варга, Э. Кастельнуово, Х. Фрейденталь. В их докладах, как и в большинстве опубликованных в этом номере журнала работ, заметно стремление к интегрированному анализу проблем математического образования, к совместному изучению целого комплекса взаимообусловленных методических вопросов. К числу основных направлений такого комплексного анализа математического образования следует отнести: а) исследование характера отображения в школьной математике теоретического содержания и приложений математики; б) переосмысление роли задач в обучении, разработка новых сюжетов и новых методических средств их подачи ученикам; в) подчеркивание необходимости развития познавательных качеств личности, самостоятельности в учебной деятельности школьников; г) использование и развитие в обучении большого количества психических и физиологических механизмов человека — зрительных, словесных, моторных способностей, навыков распознавания и преобразования данных, концентрации внимания и др.

Один из центральных в сборнике — доклад Х. Фрейденталя «Структуры в науках и структуры науки в интеллектуальном развитии и в обучении». В нем автор вновь возвращается к оценке роли понятия «математическая структура». Знаменательно смягчение его прежней резко отрицательной позиции в этом вопросе [7]. От полного отрицания целесообразности учета математических структур в построении содержания обучения, от утверждения о вредном влиянии идеи математической структуры на преподавание математики он переходит к иной позиции — признанию некоторой, хотя и ограниченной пользы, которую может извлечь методика математики из этого понятия. Вообще, идея структуры, которой обладает некоторый объект, имеет общекультурное значение. Эта идея преломляется в любой области знания, в частности в математике.

Х. Фрейденталь приводит ряд примеров, где правильная трактовка возможна только с привлечением идеи структуры, которую несет математический объект. Один из них — равнобедренный треугольник. По сравнению с «просто» треугольником он несет дополнительную структуру, что отражается в принятой терминологии: основание равнобедренного треугольника однозначно определено, тогда как в произвольном треугольнике ее можно выбирать по-разному. То же можно сказать о тетраэдре и треугольной пирамиде. Понятно, что такие отношения между математическими объектами следует учитывать в обучении. Но Х. Фрейденталь отмечает и более существенное обстоятельство: идея структуры облегчает методическое осмысление некоторых важных разделов школьной математики, например последовательности построения числовой системы.

Сказанное не следует понимать так, что Х. Фрейденталь призывает использовать в школе само понятие математической структуры. Напротив, он предостерегает от этого. Но его можно применить для анализа материала обучения, поскольку математика, как и любая наука, предстает перед методистом в виде системы знаний, а не просто свалки отдельных результатов. Что касается школьной математики, то одной из важнейших ее задач Х. Фрейденталь считает формирование способности к подобной систематизации. Итак, мир, который требуется структурировать,— вот основной объект изучения. Средства же структурирования, в том числе и понятие математической структуры, занимают скромное место технического аппарата, отдельные элементы которого входят в обучение исключительно по мере надобности. К подобному мнению склоняются в последнее время многие методисты. В частности, в [8] отмечается, что анализ математических понятий (относящихся к таким принципиальным разделам, как метаматематика и теория формальных грамматик) тесно связан с построением методики обучения математике. Далее высказывается мнение, которое мы полностью разделяем, что такое мощное средство структурирования, как классификация, не следует исключать из школьных программ.

Х. Фрейденталь останавливается еще на одном обстоятельстве, считая его серьезным препятствием к раннему введению и изучению чрезмерно обобщенных понятий. Оно сводится к тому, что ученики оперируют не новым «сверхабстрактным» понятием, а известными им реализациями, т. е. подменяют более абстрактное менее абстрактным, конкретным. С этим замечанием нельзя не согласиться. Одновременно следует сказать и о том, что с проявлением диалектики абстрактного и конкретного в обучении приходится сталкиваться постоянно. То, что с трудом усваивается, когда обобщенная структура объекта плохо «состыкована» с частными примерами (обобщению препятствуют резко выраженные индивидуальные особенности примеров), в случаях, когда связь обобщения и частных примеров прозрачна, может быть использовано в обучении с большим эффектом. Это известно каждому учителю: многие доказательства проясняются, если вести их на подходящих примерах, а не начинать сразу с общего случая.

В докладе К. Хэртига «О доказательствах и обоснованиях в обучении математике» приведено много примеров, поясияющих и подтверждающих эту мысль. Один из видов доказательств на примерах, представляющийся авторам весьма ценным, он связывает с именем С. Крыговской, назвавшей их *доказательством посредством вариации постоянных.* Соответствующая организация доказательства такова: 1) рассматривается *конкретное* утверждение; оно доказывается таким способом, чтобы была видна возможность применения структуры подобных рассуждений в ряде сходных ситуаций; 2) уточняется, в чем именно состоит это структурное подобие; формулируется общее утверждение; 3) оно обосновывается ссылкой на то, что в каждом конкретном случае можно провести полностью аналогичные рассуждения.

Так можно доказывать утверждения, зависящие от натуральных параметров. Например, при доказательстве тождества $a^{k+p}=a^ka^p$ в общем виде можно первоначальио рассмотреть равенство $a^{100+200}=$ $=a^{100}a^{200}$; при выводе формулы суммы углов выпуклого многоугольника можно сначала рассмотреть случай, скажем, 25-угольника. В приведенных частных утверждениях значения параметров подбираются так, чтобы индивидуальные особенности чисел не влияли на структуру доказательства, иными словами, чтобы *конкретные числа играли роль переменных*, чтобы они «допускали варьирование». В школьных учебниках есть немало теорем, в доказательствах которых с пользой может быть применен такой способ рассуждений.

К. Хэртиг обращает внимание на ряд положений, учет которых будет способствовать лучшему пониманию учениками смысла и структуры доказательства. Система этих положений ясно обнаруживает направленность на формироваиие способности логического анализа самых разнообразных ситуаций, в том числе и таких, где математические отношения включены в широкий культурный контекст. Вот как можно доказать равенство $C_n^{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\cdot C_n^k$ [5]. Рассматривается задача: сколькими способами можно из $n$ человек выбрать бригадира и $k$ рабочих для выполнения некоторого поручения?

Первое решение: выделяем $(k+1)$ человек — это делается $C_n^{k+1}$ способами, потом назначаем среди них бригадира (всего $(k+1)\times$ $\times C_n^{k+1}$ способов).

Второе решение: выделяем $k$ рабочих ($C_n^k$ способами), потом из оставшихся $(n-k)$ человек назначаем бригадира (всего $(n-k)\times$ $\times C_n^k$ способов).

Сравнение результатов приводит к искомой формуле.

В проведенном рассуждении математические отношения как бы выводятся из рассматриваемых отношений в коллективе. Возникает возможность учитывать математические особенности построенной наглядной модели, что значительно облегчает усвоение результата.

Понятно, что это вполне корректное математическое рассуждение, однако представить его в «привычном» математическом оформлении непросто; во всяком случае, оно потеряет в иаглядности. К. Хэртиг полагает, что такого рода рассуждения имеют полное право присутствовать в школьной математике. В системе общих дидактических положений, которые он использует для обоснования сделанного вывода, важное место занимают следующие два: «Главная причина трудностей в обучении пониманию, запоминанию и нахождению доказательств состоит в бескровности, малой увлекательности прикладного материала обучения» и далее: «Четкость процесса математического рассуждения — особенно в доказательствах — не связана с изучением стандартных средств языка» [5]. Так же мысль, подкрепленная разнообразными, подчас красивыми и неожиданными примерами, проводится во многих докладах.

Отметим еще, что К. Хэртиг приходит к выводу об ограниченных возможностях использования в курсе школьной математики доказательств, использующих математическую индукцию. Наряду с ними (и вместо них), он предлагает иные приемы, более четко проясняющие особенности ситуаций, приводящих к выявлению доказываемых свойств.

Обычное доказательство по индукции оставляет открытым вопрос: как «угадать» результат? В качестве примера рассмотрим формулу для суммы $1^2+2^2+\ldots+k^2$. Д. Пойя [9] попытался привести наводящие рассуждения (как раз при введении представления о математической индукции), но его способ вывода назвать вполне убедительным нельзя. В книге [10] приведен вывод, основанный на формуле для разности кубов. В интересующем нас плане он предпочтительнее, так как позволяет выявить «внутрениие пружины» рассуждения и запомнить *не результат, а способ* вывода. Вот еще подобный вывод, использующий комбинаторные соображения: при изучении сочетаний естественно появляются задачи типа «Показать, что $C_{k+1}^3=C_k^2+C_{k-1}^2+\ldots+C_2^2$». При помощи этого равенства и формулы для $C_k^2$ получаем:

$$C_{k+1}^3=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+\ldots+1=\frac{1}{2}(k^2+(k-1)^2+\ldots+1)+$$

$$+\frac{1}{2}(k+(k-1)+\ldots+1),$$

откуда сразу следует формула для суммы квадратов первых $k$ натуральных чисел.

Значительный интерес представляют доклады чешского педагога Франтишека Кужины «Дидактика и практика обучения» и западногерманского педагога Ханса Георга Штейнера «Тенденции развития и проблемы математического образования». Выполненные на различном материале (у Ф. Кужины это в основном анализ экспериментального обучения, у Х. Г. Штейнера — теоретический анализ дидактических основ процесса обучения математике), эти доклады полностью согласованы в отношении выводов, главный из которых — необходимость в уточнении целей изучения математики в школе и поисков критериев отбора материала обучения. В обоих докладах рассмотрены также трудности, стоящие на пути разрешения возникающих здесь проблем.

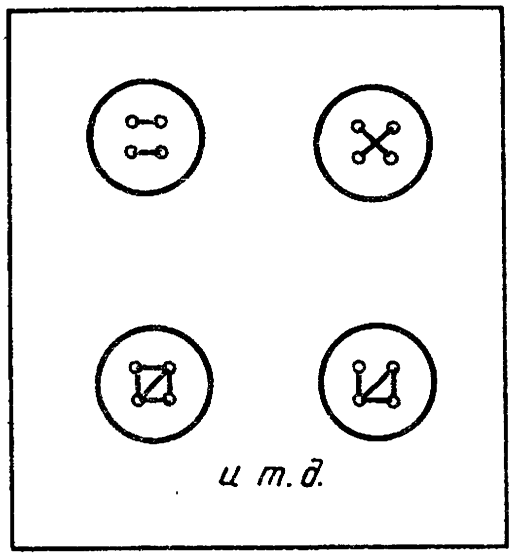
Мы остановимся на докладе Ф. Кужины, в котором содержится много полезных фактических замечаний. Автор ставит проблему в предельно открытой, заостренной форме: «Можно привести примеры того, что в обучение математике зачастую привносится субъективное отношение к предмету, что даже запросы общества ставятся перед системой просвещения недостаточно объективно, что программы определяются, с одной стороны, традицией, а с другой — модой, что значение изменений в содержании обучения переоценивается, а условия, в которых происходит сам процесс обучения, учитываются недостаточно. В чем причина? Несомненно, одна из них в том, что дидактика математики не располагает настолько глубокими и надежными результатами, которыми могла бы воспользоваться практика обучения» [5]. Ф. Кужина изучает два подхода к поставленной проблеме. Первый, общедидактический, связывается им с учетом влияния на обучение не одного лишь требования усвоить конкретный миниимум математических фактов, но целого ряда факторов, в частности установления достаточно эффективной обратной связи учителя и ученика. Второй подход — частнометодический, состоящий в использовании в обучении более разнообразных типов заданий и учебных ситуаций, нежели принято в настоящее время.

Ф. Кужина отмечает: «По-видимому, именно традиция ответственна за то, что в школьной математике наиболее распространенным типом заданий служат задачи типа «какой?» [5]. К ним автор относит задачи на построение, решение уравнений и неравенств. Способ рассуждений состоит в последовательной постановке нескольких вопросов типа «как»? (можно ли произвести дополнительное построение? Можно ли перейти от данного выражения к более простому? И т. п.). Между тем вопрос «как?» и вопрос «почему?» имеют, по мнению Ф. Кужины, самостоятельную ценность и требуют повышенного внимания в обучении. Вот какими заданиями Ф. Кужина считает возможным развивать соответствующие способности:

а) К курточке нужно пришить пуговицу с четырьмя дырками. Сколько различных рисунков из ниток может при этом образоваться (рис. 1)?

б) Условимся операцию вычерчивания отрезков заданной длины и направления обозначать буквами, а последовательное выполнение таких операций (начало данного отрезка приставляется к концу предыдущего) — приписыванием букв друг к другу. Основные операции изображены на рис. 2, а. Изобразить фигуры, полученные в результате выполнения операций: $ABCD$, $AABB$, $\overleftarrow{ABCB}$ (стрелка обозначает здесь повторение соответствующей группы операций; см. рис. 2, *б*).

В задаче а) важнейшая часть решения — анализ условия, отыскание удобного способа перебора вариантов. Задание остроумно по сюжету, его легко реализовать в виде игровой ситуации, но идея, положенная в его основу,— развитие комбинаторных способностей — достаточно широко известна. Здесь важно лишь подумать о формах внедрения ее в обучение. Задание б) представляется нам совершенно оригинальным. Его высокие дидактические качества мы видим в том, что в процессе его выполнения ученики одновременно используют *анализ знаковой*



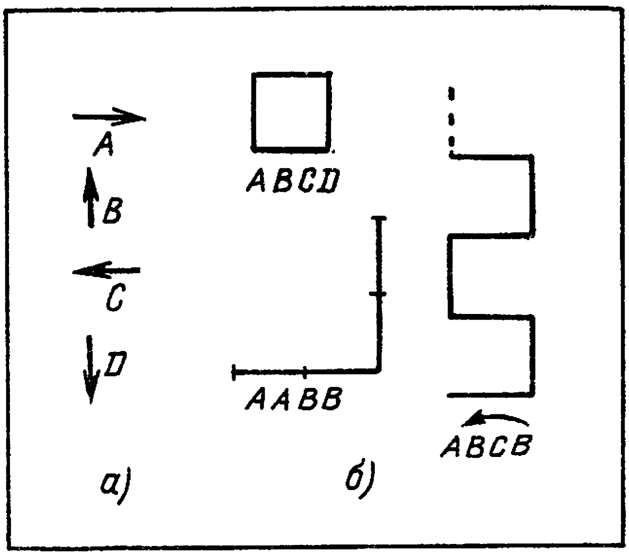




Рис. 1 Рис. 2

*структуры*, преобразуют эту структуру в последовательность реально выполняемых *моторных действий* и, наконец, имеют возможность сопоставить полученный *зрительный образ* с исходным знаком. Область применения заданий такого типа покрывает, по существу, всю школьную математику, а данное задание с успехом может быть использовано в работе по пропедевтике понятия вектора.

Вопросам преподавания геометрии уделяется особое внимание во многих докладах. По нашему мнению, это отражает не одни лишь исследовательские интересы авторов докладов или организаторов конференции. (Напомним, что С. Крыговская по праву считается одним из авторитетнейших исследователей школьного курса геометрии. Ей, в частности, принадлежит учебник [11] — одна из первых реализаций идеи геометрического преобразования в школьной практике.) Проблемы наглядности[1], логики построения курса математики, включения в него содержательных, культурно-исторических и прикладных моментов проявляются в школьной геометрии наиболее выпуклым, подчас драматическим образом. Кроме того, при изучении геометрических понятий решающее значение нередко имеет использование предметной деятельности. Рассмотренные только что задания а), б) служат достаточно типичным примером направленности методических поисков в разрешении проблемы наглядности.

Ф. Кужина представил также интересную программу формирования начальных геометрических понятий для 8—10-летних детей. Ряд ее положений может быть учтен и при обучении геометрии в среднем звене в систематическом курсе. Вот что он пишет: «Мы полагаем, что основные черты пространства, служащего предметом изучения,— его

[1] Наглядность (понимаемая в ее первичном смысле, как зрительная наглядность), пожалуй, неотъемлемая черта математики. Давиду Гильберту приписывается изречение: математика — это наука для глаз. В том же ключе профессор Ю. И. Манин говорит о «визионерской компоненте математического творчества» [12].

заполненность и делимость. Обе они уже в раннем детстве усваиваются из опыта... Потом усваивается движение — процесс, без которого познание пространства невозможно. Наш подход к обучению геометрии опирается на учет деятельности ученика, причем мы отводим главную роль категориям пространства и движения» [5]. Далее автор кратко характеризует, начиная с действий заполнения и деления пространства, типы действий, которые используются в формировании начальных геометрических представлений: рисование и вычерчивание, моделирование, измерение. Таким образом, предметная деятельность включается в систему обучения в качестве ее существенной части.

Определяющей предметная деятельность может быть, однако, только на начальных этапах усвоения геометрии. В дальнейшем на первый план выступают более изощренные в теоретическом отношении формы познания свойств фигур. Рассмотрению отдельных возникающих при этом вопросов посвящены доклады Э. Кастельнуово «Способность к видению в математике. Несколько дидактических замечаний об интуиции и дедукции» и Д. Гори-Жорги «Аффинные, синусоидальные и акустические преобразования». В первом из них автор настаивает на том, что в школьную практику могут быть включены многие приемы, в свое время возникшие в ходе развития науки, а в дальнейшем замененные более совершенными в логическом отношении. В подтверждение этого положения она рассказывает об эксперименте использования в обучении принципа Кавальери. С его помощью, посредством искусного сочетания наглядных рассмотрений, наводящих соображений и (нестрогих) обоснований выводится экстремальное свойство сферы: из всех поверхностей данной площади сфера ограничивает тело наибольшего объема.

Доклад Д. Гори-Жорги построен на материале тригонометрических функций. Автор показывает, как «извлечь» эти функции из физических наблюдений и их математического осмысления. В качестве наглядного средства взят осциллограф, на экране которого можно наблюдать за звуковыми волнами (в эксперименте это был звук флейты). Велось сопоставление физических и математических свойств, вернее, математические понятия *вводились* для описания наблюдаемой физической картины: высота тона — величина периода, сила звука — амплитуда колебаний, характер звучания — характер графика функции. В данном случае физическая реальность служит мотивировкой введения математического объекта и средством осмысления вводимых понятий. Отметим, что этот эксперимент проводился в рамках интегрированного курса математики и физики (эксперимент в лицее с учениками 16—17 лет).

Мы видим, что в докладах Ф. Кужины, Э. Кастельнуово, Д. Гори-Жорги представлены различные взгляды на построение школьной геометрии. Но их можно согласовать, считая, что представлены определенные этапы ее освоения. Если согласиться с этим, то оказывается, что выделены три этапа[2]: 1) «Практическая геометрия». На этом этапе геометрические факты еще не полностью отделены от своих физических прообразов. 2) «Наглядная геометрия». Здесь происходит совершен-

[2] Попытки периодизации освоения школьного курса геометрии производились неоднократно, см., в частности [13].

ствование способа «видения» свойств фигур: они должны получать осмысление при сопоставлении их с опытами над физическими телами и явлениями. В числе средств обоснования свойств широко представлены наглядные рассуждения, выводы по аналогии, ссылки на физические модели. 3) «Формальная геометрия». На этом этапе особое внимание уделяется посильной для учеников строгости вывода свойств и построению геометрии как дедуктивной науки. Существенно, что определенная часть приемов, используемых на ранних этапах, продолжает применяться и на поздних; это не только создает «внутреннюю преемственность» в предмете, но и позволяет наладить межпредметные связи и связь с практикой.

Особое внимание обращается во многих докладах на анализ процесса работы над задачей. Мы привели примеры заданий, способ рассмотрения которых показывает, что главное в них — изучение сюжета, а не только получение ответа на поставленный вопрос. Представляется, что это перспективная тенденция в методике математики. При таком подходе подчеркивается, что *именно методика работы над задачей определяет ее место в системе обучения*. Иными словами, классификация задач, не учитывающая цели, ради которой они вводятся в обучение, неизбежно оказывается односторонней, не отражающей фактический эффект их использования. В этом отношеиии интересны содержащиеся в книге предложения по активизации учения путем решения разнообразных задач. Такое обучение содействует развитию творческих способностей учащихся, их фантазии и стремления к поиску.

В докладе К. Лабур (Франция) «Экспериментальный подход в дидактике математики: ситуации, стимулирующие общение учеников» рассказано об использовании на уроке заданий типа: «Придумать словесное описание геометрического образа, по которому можно было бы однозначно его восстановить» (см. рис. 3). Ребятам предлагали советоваться друг с другом, выдвигать разные принципы описания, оценивать их и реализовывать наилучшие. Автор отмечает, что в определенных условиях задания такого типа положительно сказываются на отношении к учению. Отметим, что такие задания можно с успехом применять, например, когда требуется развить самостоятельность принятия решений, предприимчивость учеников, приучить их работать сообща[3].

Иной тип заданий содержится в докладе Т. Варги «Обучение математике в Венгрии сегодня». Он выделяет особый класс задач, в решении которых наиболее важная часть — четкая реконструкция ситуации. При этом наиболее полезными он считает задачи, допускающие неоднозначность в раскрытии предложенной ситуации. Приведем пример такой задачи: «Биссектрисы углов $A$ и $D$ параллелограмма $ABCD$ делят сторону $BC$ на три равные части. Найти периметр $ABCD$, если

---

[3] С. Крыговская [14] предлагает отчасти сходное задание: учитель объясняет понятие (конкретио — выпуклой фигуры), а ребят просит обменяться письмами с определением и пояснениями к нему. Мы решили опробовать этот прием в работе с семиклассниками. Из анализа писем и дальнейшего хода учебного процесса выяснилось, что усилия по составлению текста определения вполне оправдали себя.

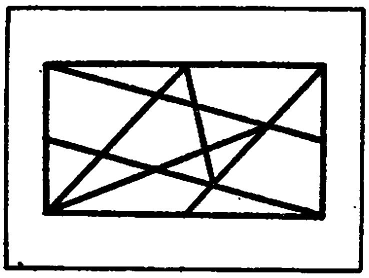


Рис. 3

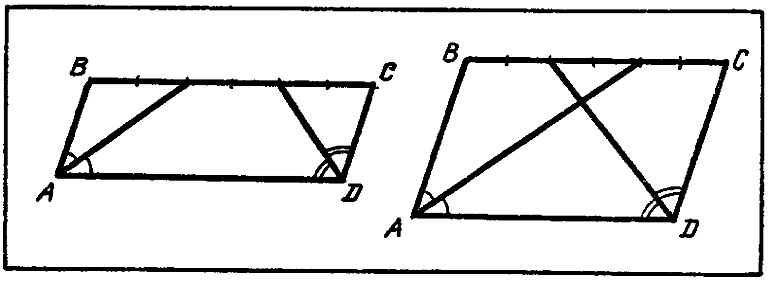



Рис. 4

$AB = 10$ см». Двузначность ситуации видна из рис. 4. Такие задачи не только развивают логическую культуру учеников, они полезны в достижении конкретных целей, в частности при подготовке к исследованию задач на построение.

Учитывая все вышесказанное, можно сделать вывод о том, что *вопросы гуманизации школьного математического образования следует рассматривать с точки зрения как уточнения целей математического образования, так и путей совершенствования методов обучения математике.* Дальнейший прогресс в методике математики во многом будет определяться тем, насколько гармонично окажутся учтенными обе эти стороны.

Вместе с тем итоги конференции свидетельствуют о том, что для использования в школьном обучении сведений, имеющих общекультурное значение, приходится опираться на довольно развитые математические представления, а нередко — и на прочные навыки. Поэтому гуманизацию математического образования иельзя противопоставлять наличию в школьном курсе достаточно высокого теоретического уровня изложения материала.

В разработку проблем развития современного математического образования большой вклад внесла действующая под эгидой ЮНЕСКО Международная комиссия по изучению и развитию математического образования, одним из руководителей которой в течение нескольких десятилетий была С. Крыговская.

За прошедший год в методических журналах многих стран были опубликованы статьи, раскрывающие ее выдающийся вклад в деятельность этой комиссии и в методику преподавания математики. Особо хотелось бы отметить статью Ж. Адда во французском журнале Ассоциации преподавателей математики народного образования (АРМЕР) [15]. В ней коротко подведен итог проделанной С. Крыговской созидательной работы. Основываясь на своем богатом опыте преподавания в школе (свыше 25 лет, в том числе несколько лет преподавания в подпольной школе, организованной в окрестностях Кракова в годы фашистской оккупации), на традициях и достижениях Польской математической школы, современииком расцвета которой она являлась, на глубоко ею продуманном дидактическом наследии европейской культуры, А. С. Крыговская приняла активное участие в создании и пропаганде гуманистических идей, которые, по ее убеждению, могут и должны быть связаны с преподаванием математики в школе Одной из первых она обратила внимание на разносторонние возмож ности школьной математики в отношении развития важнейших сторон мышления при формировании, усвоении и применении математической деятельности, на необходимость установления при реформе математического образования правильного соотношения формальных и содержательных сторон изучаемого предмета.

Творческая активность С. Крыговской сохранялась до последних дней ее жизни. Она готовилась к поездке во Францию и просила отложить намеченные сроки, надеясь на улучшение здоровья. Ею был подготовлен доклад для международной конференции по математическому образованию в Будапеште, на которой планировалось ее выступление. Незадолго до своей кончины она передала в наш журнал рукопись одной из своих последних работ. К сожалению, ей не довелось увидеть эту работу опубликованной [14].

С. Крыговская воспитала многих одаренных педагогов-последователей, увлеченных ее профессиональными идеями и активно участвовавших в международном методическом сотрудничестве. Надеемся, что ее ученики и последователи не только продолжат дело, которому она посвятила свою жизнь, ио и смогут сделать достоянием широких кругов математической общественности как интересную историю деятельности Международной комиссии по математическому образованию, так и ее перспективные планы. Это настоятельно необходимо для развития дальнейшего сотрудничества педагогов-математиков всех страи в решении высоких задач гуманизации школьного образования.

## Литература


1. Резолюция Всесоюзного съезда работников народного образования // Математика в школе. 1989. № 2.

2. *Руткевич М. Н., Рубинов Л. Я.* Общественные потребности, система обучения, молодежь. М.: Политиздат, 1988.

3. *Глейзер Г. Д., Черкасов Р. С.* Школе необходима концепция общего математического образования // МВШ 1988. № 6.

4. К концепции школьного математического образования // Математика в школе. 1989. № 2.

5. Didaktyka matematyki, No. 7 Roczniki polskiego towarzistwa matematycznego, seria V. Warszawa: Panstw. Wyd. Naukowe, 1987.

6. *Krygowska Zofia.* Zarys didaktyki matematyki, czeŝc 1, 2. Warszawa: Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, 1977.

7. *Фрейденталь Г.* Математика как педагогическая задача. М.: Просвещение. Ч. I, 1982; ч. II, 1983.

8. *Виленкин Н. Я.* Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты // МВШ 1988. № 4.

9. *Пойя Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.

10. *Натансон И. П.* Суммирование бесконечно малых величин. М.: Гостехиздат, 1956.— (Популярные лекции по математике, вып. 12).

11. *Крыговская С.* Геометрия: Основные свойства плоскости. М.: Просвещение, 1970.

12. *Манин Ю. И.* От редактора перевода // Н. Коблиц. *p*-адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функция. М.: Мир, 1982.

13. *Столяр А. А.* Педагогика математики. Минск: Выш. шк. 1986.

14. *Крыговская С.* Роль определения в математической деятельиости учащихся // Математика в школе. 1988. № 6.

15. *Adda Jozette.* Anna Zofia Krygowsca // Bulletin de l'APMEP 1988. N 366.

# Задачи, задачи, задачи — и история, и современность

*О книге Г. А. Гальперина и А. К. Толпыго «Московские математические олимпиады»*

*Публикуемые ниже комментарии — быть может, последнее, что вышло из-под пера И. М. Яглома, талантливого математика, незаурядного педагога и замечательного популяризатора математики, скончавшегося 17 апреля 1988 г.*

*Трудно даже и представить себе, какой многогранной и плодотворной была его деятельность по пропаганде математических знаний, сколько молодых людей обязаны ему своим «обращением в математическую веру». Многие и многие школьники прошли через его книги, статьи, многочисленные переводные работы, которые он редактировал. Его отличала необыкновенная широта знаний в области математики — начиная с ее истории и кончая приложениями в современной физике; он живо интересовался всеми новыми идеями и направлениями, глубоко чувствовал дух современной математики, ее единство и интернациональный характер. Он был лично знаком с доброй половиной московских математиков и физиков, в круг его общения входили и совсем молодые ученые, и такие выдающиеся представители науки, как А. Н. Колмогоров, И. М. Гельфанд, А. Д. Сахаров, не говоря о многих иностранных ученых, с которыми он встречался или переписывался.*

*Особенно хочется подчеркнуть внимание и заинтересованное отношение Исаака Моисеевича к молодежи, его умение быть с нею на равных — без тени заносчивости или высокомерной снисходительности. Он умел ценить не только крупные достижения, но и самые скромные результаты, облегчавшие или прояснявшие изложение отдельных вопросов. Помню, в начале 60-х гг., редактируя его заметку по комбинаторике для «Математического просвещения», я вдруг обнаружил, что вывод приводимой в заметке формулы можно существенно упростить. Исаак Моисеевич не только с готовностью и удовольствием принял это усовершенствование, но тут же указал на такое его обобщение, какое мне самому и в голову не приходило. В другой раз, всего несколько лет назад, Исаак Моисеевич предложил мне перевести одну заметку американского математика Биркгофа о приложениях математики к эстетике. Математический уровень этих приложений показался мне слишком примитивным, и я отказался. Исаак Моисеевич оценивал работу совсем иначе, но, поспорив немного, не стал настаивать — он прекрасно умел понимать и уважать чужую точку зрения.*

*И. М. Яглом был человеком большой культуры — читал на нескольких языках, хорошо знал литературу и искусство, особенно живопись.*

*Счастливый в своем призвании, он был, однако, человеком трудной судьбы. Он далеко не безучастно относился ко всему уродливому, что случалось в нашей жизни. Исаак Моисеевич был в числе подписавших коллективное письмо математиков в защиту принудительно госпитализированного А. С. Есенина-Вольпина и сурово за это поплатился — сначала его отстранили от работы в МГПИ, а затем и от преподавательской работы вообще. Так по горькой иронии судьбы этот* *прирожденный педагог оказался за бортом нашей высшей школы.*

*Смерть застала его в гуще замыслов, планов, непрерывной литературной работы, которую он не прекращал, несмотря на недавнюю трагедию — безвременный уход из жизни талантливого сына.*

*В последний момент поступило сообщение о присуждении Исааку Моисеевичу Яглому престижной международной премии Кортина-Уллисе, которая вручается раз в два года в Италии за выдающиеся достижения в области популяризации науки. Эта премия присуждалась уже 25 раз, но сейчас ею впервые отмечается популяризация именно математики, и первым математиком, ее заслужившим, оказался Исаак Моисеевич. Как радостно это сообщение и как трагично, что он до него не дожил!*

*Всякий человек неповторим, но Исаак Моисеевич Яглом был в своем роде уникален. Думаю, что не скоро появится кто-либо, кто сможет по праву претендовать на оставленное им место.*

**Ф. Л. Варпаховский** (Москва)

В 1965 г. в издательстве «Просвещение» вышел в свет превосходиый «Сборник задач московских математических олимпиад», составленный одним из активных деятелей школьного математического кружка при МГУ и членом оргкомитета нескольких московских школьных математических олимпиад А. Леманом. Книга эта давно уже стала библиографической редкостью, и в 1986 г. то же издательство выпустило новый сборник «Московские математические олимпиады», составленный представителями другого поколения московских «олимпиадииков» Г. А. Гальпериным и А. К. Толпыго. Об этой последней книге и пойдет речь в статье.

Как известно, первая школьная математическая олимпиада была проведена в Ленинграде в 1934 г.[1] С 1935 г. такие олимпиады регулярно (кроме военных 1942—1944 лет) проходят в Москве. Долгие годы — вплоть до возникновения всероссийских и всесоюзных олимпиад (не говоря уж о международных) — «самой главной» олимпиадой страны традиционно являлась московская[2], собственно, и расширение «области действия» олимпиады на всю страну (а затем и на весь мир) началось с того, что на московскую олимпиаду стали приезжать школьники из других городов, иногда — и из Ленинграда. И хочется порадоваться, что для сбережения опыта московских олимпиад сделаио

[1] Старейшей в мире является Венгерская математическая олимпиада, проводившаяся ежегодно (кроме военных лет) начиная с 1896 г. По этому поводу см.: Кюршак И., Нейкомм Д., Хайога Д., Шурани Я. Венгерские математические олимпиады. М.: Мир, 1976.

[2] Московская олимпиада была тесно связана со школьным математическим кружком при МГУ (о котором рассказывается в вводных статьях к обоим сборникам задач московских олимпиад 1965 и 1986 гг.); напомню, что этот кружок породил две обширные серии книг по математике для школьников: «Библиотека математического кружка» и «Популярные лекции по математике». Другие городские олимпиады, в том числе и ленинградская, видимо, столь солидного фундамента все же не имели.

так много. Порадоваться, ибо более чем полувековая история московских олимпиад — это история нашей школы, школьного математического образования и работы с интересующимися математикой школьниками.

Интересно проследить, в частности, как менялась трудность предлагаемых на олимпиадах задач и сам их характер: если задачи первых олимпиад, как правило, имели стандартно школьный характер, то сам сюжет многих из задач более поздних олимпиад зачастую представляет собой весьма занимательную историю, в которой могут участвовать полицейские и гангстеры, странствующие рыцари и драконы, обезьяны и львы, алхимики и богатыри, дядька Черномор и наш добрый друг Остап Бендер, много детей, занятых самыми разными делами, и мало квадратных уравнений или треугольников. Долго соблюдаемой традицией являлось включение в список задач такой, в условии которой фигурирует число, указывающее год проведения олимпиады. Поучительны предваряющие как книгу Лемана, так и ту, о которой здесь идет речь, статьи, рассказывающие об истории олимпиад: авторы статьи первого сборника дошли до начала 60-х гг., а Гальперин и Толпыго довели рассказ об олимпиадах до наших дней.

В результате большой работы Гальперину и Толпыго удалось заполнить ряд пробелов в содержании книги Лемана и внести существенные исправления в тех местах, где у их предшественника обнаружились ошибки (с. 18). Однако до конца работа не доведена: так, например, я с некоторым недоумением прочитал в предисловии авторов фразу: «Однако по-прежнему не обнаружен 1-й тур IV олимпиады», ибо не понял, почему ни Леман, ни Гальперин и Толпыго не обратились к участникам той давней (1938 г.!) олимпиады (в том числе ко мне)[3]. На 2-м туре IV олимпиады фигурировали 5 задач, из которых в книге перечислены 4; я уверен, что совместными усилиями оставшихся в живых участников этой олимпиады мы пропущенную задачу (она была несложной) могли бы вспомнить. Из задач 1-го тура я помню ту, которая тогда показалась мне наиболее трудной (сегодня она, надеюсь, такой не покажется): «В пространстве (не в одной плоскости) даны 4 точки; сколько существует плоскостей, равноудаленных от этих точек?» (Не ручаюсь, что в условии задачи 49-летней давности была оговорка о том, что точки не принадлежат одной плоскости; возможно, требовалось отдельно рассмотреть и противоположный случай.) И прочие пробелы можно было бы попытаться заполнить, обратясь к участникам той или иной олимпиады.

Задачи в книге Гальперина и Толпыго составляют уникальное собрание: ведь это коллективный труд большого количества математиков разных поколений; творческий потенциал (как правило, оставшихся безвестными) авторов проявляется в живой связи многих задач с актуальными идеями современной математики. Некоторые (весьма немногочисленные) примеры такого рода указаны в предисловии авторов (с. 12—13); я бы смог назвать и немало других, но никак не взялся бы на малой площади журнальной рецензии разъяснить эти связи. Укажу только, что обилие в книге задач на оценки и оптимизацию;

[3] И. М. Яглом был участником IV Московской олимпиады и получил на ней I премию.— *Примеч. ред.*

задач, связанных с игровыми ситуациями; всякого рода схем, описываемых конечным набором (иногда таблицей) чисел или рисунком, на котором изображены несколько (конечное число) точек, принадлежащих интересующим нас объектам[4] и в котором нам важна лишь «качественная» сторона, т. е. не расстояния и углы, а лишь «грубые» особенности расположения точек и линий[5], вполне соответствует некоторым общим тенденциям современной математической науки. Кое-какие — но весьма редкие и неполные — указания на возможность развития заложенных в тех или иных задачах идей содержатся во второй части книги. Замечу еще, что многие задачи в книге имеют неожиданные (т. е. противоречащие естественным интуитивным представлениям) ответы; в качестве примеров можно назвать, например, задачи 13.7, 24.7, 32.23 и 32.34 (обратите внимание на дополнительный вопрос в указании к решению этой задачи), 38.5 и 38.19 (и здесь не обойдите вниманием дополнительное замечание в указании!), 44.3.

Книга состоит из предисловия редактора крупнейшего советского математика, академика А. Н. Колмогорова, который был весьма тесно связан с московскими математическими олимпиадами и школьным математическим кружком при Московском университете[6]; предисловия (и указаний к работе с книгой) ее авторов; двух основных частей — «Задачи московских олимпиад» и «Решения, указания, ответы», двух приложений и краткого списка литературы. Первое приложение содержит задачи (и указания к их решению) XLIX олимпиады 1986 г., прибавленные уже по завершении основной работы над книгой; о втором приложении будет сказано далее.

Теперь обратимся к очень важной (и, по-моему, очень удачной), второй части книги. Даже по сравнению с очень экономно и сжато составленными Леманом указаниями Гальперин и Толпыго добились еще большей лаконичности этого раздела. Напомню, что в первых книгах

[4] Эти системы чисел или рисунки являются (соответственно арифметическими или геометрическими) математическими моделями составляющей содержание задачи (чаще всего — игровой или общежитейской) ситуации. По этому поводу см., например, доступную и начинающим книгу: Яглом И. М. Математические структуры и математическое моделирование. М.: Советское радио, 1980.

[5] См., например, связанные с большой математической теорией (кое-что о ней сказано в статье: Леонард Беве. Мини-геометрия // Квант. 1976. № 6. С. 2—12) задачи 9.15 и 9.19, в которых речь идет об автобусиых маршрутах в городе; при этом нас не интересуют ни расстояния между остановками, ни конкретиая «геометрия» маршрутов, а лишь вопросы принадлежности (или, напротив, непринадлежности) фиксированной остановки тем или иным маршрутам.

[6] А. Н. Колмогоров трижды (в 1937, 1963 и 1975 гг.) возглавлял оргкомитет московской олимпиады (он также многие годы руководил проведением всесоюзных математических олимпиад); одновременно он являлся одним из двух профессоров МГУ (вторым был один из организаторов школьного математического кружка, чл.-кор. АН СССР Л. Г. Шнирельман (1905—1938)), руководивших некогда одной из секций кружка (как правило, секциями кружка руководили студенты МГУ, изредка — аспиранты).

«Библиотеки математического кружка» условия задач сопровождались двумя дополнительными разделами: «Указания» и «Решения». Читателям рекомендовалось сначала попробовать решить задачу без всякой подсказки (этот совет повторяют Гальперин и Толпыго); если это не удается, заглянуть в «Указание»; если же и «Указание» не поможет, читать ее «Решение». В той книге, о которой я рассказываю, решения отсутствуют; к указаниям же приходится подходить творчески, ибо их расшифровка — часто дело вовсе не простое. Другими словами, авторы обращают свою книгу только к вдумчивым и заинтересованным читателям, но другие-то ее, надо думать, и в руки не возьмут.

Хотелось бы здесь привести примеры ярких, нестандартных указаний и показать, как нетривиально они доводятся до полного решения задач, но из-за недостатка места отмечу лишь значительное число случаев, когда (возможно, неожиданно для читателя) указание рекомендует алгебраическую задачу истолковать как геометрическую, или наоборот — такой характер имеют указания к решениям, скажем, задач 8.8, 17.27, 17.33 (здесь авторы дают только ответ, опуская целесообразную стратегию его отыскания. В задаче требуется установить, что если сумма 100 чисел меньше 300, а сумма их квадратов — больше 10 000, то сумма некоторых трех из этих чисел больше 100. Для доказательства этого полезно разбить отрезок длины 300 на 100 частей $x_1 \dots x_{100}$, на каждой части $x_0$ построить квадрат по одну сторону от прямой, затем переставить эти квадраты в порядке возрастания (или убывания) — и... подумать[7]) и 17.35, 19.35, 21.19 (где оказывается полезным и физически переистолковать эту задачу и обобщить ее условие), 22.37 (где геометрической задаче уместно придать физическую форму), 34.29 и 34.31 (это, по существу, одна задача) или 41.19. Вообще, при составлении олимпиадных задач следует придерживаться следующих правил: меньше техники (хоть кое-где определенная техническая работа все же требуется, скажем, в той же задаче 17.33 — так жалко, что здесь авторы «сэкономили» на указании), наглядность используемых образов и необычный ракурс рассмотрения вопроса. Эти установки авторы отлично освоили. В качестве других примеров можно указать на достаточно характерную для современной математики задачу 41.15, где замена оценки 12 % в условии задачи на более сильный результат «менее 50 %» проясняет суть дела, или задачу 34.21, где для получения решения условие задачи надо также решительно перетолковать.

Остановимся наконец на втором приложении — это 80 задач для «свободного» решения, не сопровождаемые никакими указаниями. Здесь тоже много интересных задач, и читателю есть над чем подумать. Для примера назову хотя бы задачу 3: «Указать, существуют ли такие иррациональные числа $\alpha$ и $\beta$, что $\alpha^\beta$ рационально». Вот одно из возможных решений: если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рационально, то ответ на поставленный

---

[7] В указании авторы подсказывают, что (если сумма чисел 300, а сумма их квадратов больше или равна 10 000) сумма трех наибольших чисел равна 100 лишь если: а) одно число равно 100, а все остальные — нулю или б) 9 чисел равны 100/3, а все остальные — нулю.

вопрос уже положителен, если же это число $\alpha$ иррационально, то рационально (и равно 2) число $\alpha^\beta$, где $\beta = \sqrt{2}$.

В заключение отмечу, что книга Г. А. Гальперина и А. К. Толпыго мне понравилась. Надеюсь, она принесет большую пользу как учителям, так и учащимся, интересующимся математикой.

**И. М. Яглом**

# О пособии Е. С. Дубинчук и З. И. Слепкань «Преподавание геометрии в средних ПТУ»

**В. Н. Боровик, Н. Ф. Плясун** (г. Чернигов)

Украинское головное издательство издательского объединения «Вища школа» выпустило пособие Е. С. Дубинчук и З. И. Слепкань «Преподавание геометрии в средних ПТУ» в двух книгах (для 1-го года обучения — в 1985 г., для 2-го года обучения — в 1986 г.). Прежде всего хочется отметить, что оно не дублирует изданные ранее аналогичные пособия для средней общеобразовательной школы и отличается своеобразностью и оригинальностью изложения рекомендаций для преподавателя математики среднего профтехучилища. Авторы пособия в самом начале предупреждают читателя, что предлагаемые рекомендации — не образец для копирования, а материал для творческого использования учителем-практиком в своей работе с учетом личного опыта, степени математической подготовленности учащихся, учебно-материальной базы и других обстоятельств.

Пособие написано в соответствии с действующей программой по математике, типовым учебным планом для средних ПТУ и учебным пособием «Геометрия 6—10» А. В. Погорелова. В пособии основное внимание уделено разработке уроков по всем темам программы по геометрии 1-го и 2-го года обучения: распределение учебного материала по урокам, подбор задач и упражнений для опроса и закрепления, а также для поэтапного контроля знаний учащихся.

Характерно, что авторы не придерживаются единого шаблона построения урока, а предлагают разнообразные их структуры в зависимости от конкретных целей каждого урока, добиваясь единства образовательных, воспитательных и развивающих функций обучения. Один урок начинается с актуализации знаний учащихся, необходимых для введения нового понятия, другой — с проверки домашнего задания, третий — непосредственно с изучения нового материала, с проведения самостоятельной работы или математического диктанта, с фронтального повторения материала пройденной темы и т. д.

Каждый урок содержит определенную систему заданий, раскрывающих содержание и особенности изучения темы, что способствует активному усвоению знаний, формированию у учащихся умения логически рассуждать, доказывать утверждения. Среди заданий имеется и дополнительный материал для опроса учащихся, проблемные задания, значительное число дополнительных задач. Все это способствует интенсификации учебного процесса, творческой работе на уроке.

Заслуживают внимания предлагаемые авторами различные формы самостоятельной работы учащихся; по данным образцам математических диктантов, кратковременных письменных работ, контрольных работ преподаватель математики легко может составить необходимое число вариантов таких работ. В домашнюю самостоятельную работу предлагается включить задания по изготовлению посильных моделей, таблиц, деталей, по составлению задач производственного характера, подбору примеров, иллюстрирующих использование изученных понятий.

Интересны рекомендации авторов пособия по организации заключительного повторения материала и подготовки к экзамену. Мы вполне согласны с авторами, что «заключительное повторение нельзя подчинять только подготовке к экзамену. Главная задача повторения — обеспечить важнейшие качества знаний учащихся — правильность, осознанность, систематичность, умение связывать их с практикой». Предлагаются различные формы итогового повторения: повторительно-обобщающие беседы и лекции преподавателя, уроки-семинары, уроки систематизации опорных знаний, практические и лабораторные работы. На нескольких уроках на повторение рекомендуется провести решение задач с практическим содержанием, чтобы осуществить связь геометрического материала с профессионально-технической подготовкой учащихся.

Особо следует остановиться на вопросе об изображении пространственных фигур и их комбинаций. Авторы разработок рекомендуют «обратить должное внимание на формирование у учащихся навыков и умений грамотного оформления рисунков». Они довольно подробно излагают в первой книге свойства параллельного проектирования, построение изображений описанных и вписанных в окружность правильных треугольников и шестиугольников, но не обращают должного внимания учителя на изображение видимых и невидимых линий. Более того, сами не проявили достаточной требовательности к правильному выполнению рисунков.

Во второй книге авторы предлагают полезные для учителя правила-ориентиры изображения тел вращения: цилиндра, конуса, усеченного конуса, вписанных в цилиндр призм и др. Даны также правила-ориентиры, которые полезно использовать при решении конкретных задач.

При изучении шара авторы пособия рекомендуют учителю дать учащимся дополнительные сведения о понятиях, которые употребляются в литературе, но не нашли отображения в учебном пособии (экватор, полюс, меридиан, параллель, сопряженные диаметры эллипса). В пособии правильно подчеркивается, что когда при изображении шара экватор имеет форму эллипса, то проекции полюсов не принадлежат очертанию шара. Их положение зависит от угла наклона плоскости экватора к плоскости проекции. Указан один из приемов построения полюсов, когда выбран экватор. Это важно, так как во многих методических пособиях при изображении шара ошибочно помещают полюсы на очертании шара.

В методической литературе пока нет единого подхода к изображению комбинации тел. Существует, по крайней мере, три разных подхода к этой проблеме: одни считают вписанные и описанные тела непрозрачными, поэтому на изображении все линии вписанного тела изображаются штриховыми линиями различной толщины (Ж. Адамар, А. В. Погорелов, Н. И. Кованцов, К. С. Барыбин, Л. М. Лоповок и др.); другие считают описанное тело прозрачным как для себя, так и для вписанного тела, а вписанное — непрозрачным для себя и для описанного тела, при этом все линии описанного тела, не закрываемые вписанным, изображаются сплошными линиями (З. А. Скопец, Г. Г. Маслова, В. А. Гусев и др.); третьи принимают описанное тело прозрачным для вписанного тела, но непрозрачным для себя, а вписанное тело — непрозрачным, при этом каждое тело в комбинации изображается как непрозрачное для себя (Н. М. Бескин).

В рецензируемом пособии трудно определить позицию авторов по этому вопросу. В нем имеется ряд неточностей во многих рисунках. Авторы также ошибочно употребляют термин «пунктирная» линия вместо «штриховая». На с. 85 второй книги приведен образец записи решения задачи на вычисление объема параллелепипеда. К сожалению, в этом «образце» допущены три математические описки.

В своей практической работе мы придерживаемся первого подхода к решению проблемы изображения комбинации тел, что совпадает с точкой зрения автора учебного пособия «Геометрия 6—10» А. В. Погорелова: все тела не прозрачны ни для себя, ни для других тел.

В целом рецензируемая книга окажет помощь преподавателям в решении организационно-методических вопросов обучения геометрии в средних ПТУ по учебному пособию «Геометрия 6—10» А. В. Погорелова.

# План выпуска литературы Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука» в 1990 г.

## История математики

В сборник работ замечательного советского ученого академика **А. Н. Колмогорова «Математика в ее историческом развитии»** вошли его знаменитая статья «Математика» из БСЭ, статьи «Ньютон и современное математическое мышление», «Лобачевский и математическое мышление девятнадцатого века» и ряд других, а также воспоминания А. Н. Колмогорова о математиках двадцатого столетия и встречах с ними. Адресован преподавателям, студентам, школьникам, всем тем, кто интересуется математикой и ее историей.

В книге **Ю. В. Матиясевича «Девятая проблема Гильберта»** дается полное доказательство алгоритмической неразрешимости этой проблемы великого немецкого математика, касающейся диофантовых уравнений, вместе с необходимыми сведениями из теории алгоритмов и теории чисел, а также приложения развитой для этого техники к другим массовым проблемам теории чисел, алгебры, анализа, теоретического программирования. Предназначена для преподавателей и студентов старших курсов университетов и пединститутов. Может быть использована учителями математики средней школы.

В книгу **А. Пуанкаре «О науке»** вошли четыре произведения выдающегося французского ученого «Наука и гипотеза», «Ценность науки», «Наука и метод» и «Последние мысли», которые посвящены рассмотрению путей познания в математике, механике и физике. Рассчитана на преподавателей и студентов университетов и пединститутов, учителей математики и физики средней школы.

В книге **Д. Я. Стройка «Краткий очерк истории математики»**, по праву считающейся одной из лучших в мировой математической литературе, живым, образным языком изложена история математики от зарождения этой науки до конца прошлого столетия. Адресована преподавателям математики, студентам университетов и пединститутов.

**Учебники, учебные пособия, справочники**

Книга **А. Д. Александрова и Н. Ю. Нецветаева «Геометрия»** содержит основные разделы курса этой дисциплины: аналитическую геометрию, элементарную геометрию на основе аксиоматики, включая геометрические преобразования и построения, элементы многомерной и проективной геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, основания геометрии с обзором теорий «высшей» геометрии. Рассчитана на студентов математических специальностей педвузов и университетов, преподавателей средней школы и техникумов.

В книгу **Ю. Г. Борисовича, Н. М. Близнякова, Я. А. Израилевича и Т. Н. Фоменко «Введение в топологию»** включены основные понятия и теоремы общей и гомотопической топологий, даны классификация двумерных поверхностей, основные понятия гладких многообразий и их отображений, рассмотрены элементы теории Морса и теории гомологий с приложениями к неподвижным точкам. Предназначена для студентов математических факультетов университетов и пединститутов. Может быть использована преподавателями.

Десятым изданием выпускается **«Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича.** В него включено свыше 4000 задач и упражнений по важнейшим разделам математического анализа: введение в анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной, неопределенный и определенный интегралы, ряды, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, интегралы, зависящие от параметра, кратные и криволинейные интегралы. Почти ко всем задачам даны ответы. В приложении помещены таблицы. Предназначен для студентов физических и механико-математических специальностей вузов.

В **«Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных» Л. Д. Кудрявцева, А. Д. Кутасова и В. И. Шабунина** включены задачи по дифференциальным исчислениям, функциям нескольких переменных, кратным, криволинейным и поверхностным интегралам, интегралам, зависящим от параметра, и элементам функционального анализа. Сборник является продолжением двух уже изданных книг тех же авторов «Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость» (1984) и «Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды» (1985). Все задачи снабжены ответами. Приводятся подробные решения типичных задач. Рассчитан на студентов и преподавателей университетов, techинститутов и втузов с расширенной программой по математике.

Четвертым изданием выходит двухтомный **«Курс математического анализа» С. М. Никольского.** Он написан на основе лекций, читаемых автором в Московском физико-техническом институте. Может быть использован в вузах с повышенной программой по математике.

Полное изложение классической теории, являющейся краеугольным разделом высшего анализа и топологии, содержится в книге **О. Г. Смолянова и В. И. Соболева «Топологические векторные пространства».** Материал сопровождается иллюстрирующими примерами и упражнениями. Рассчитана на студентов математических факультетов университетов и пединститутов.

На специальности средних специальных учебных заведений, где изучение таких дисциплин, как техническая механика, электротехника с основами электроники, теплотехника, основы гидравлики и физическая химия, геодезия, составляет базу профессиональной подготовки учащихся, ориентирована книга **О. Н. Афанасьевой, Я. С. Бродского и А. Л. Павлова «Математика для техникумов на базе среднего образования».** Она соответствует действующей программе. Задачник к данному курсу запланирован к выпуску в 1991 г.

Важные вопросы теории дифференциальных уравнений, находящие непосредственное применение в классических и современных областях теоретической механики, рассматриваются в книге **Н. П. Векуа «Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и их применения в механике».** Большое внимание автор уделяет изучению законов движения материальной точки, рассмотрению законов движения материальной точки переменной массы и непосредственно связанных с ними реактивных сил. Показывается также значение реактивных сил для достижения так называемых космических скоростей, рассматриваются определенные вопросы теории космического движения, некоторые вопросы теории относительности и актуальные вопросы теории устойчивости движения. Адресована преподавателям математики и физики средних школ, а также учащимся специализированных математических средних школ.

Третьим изданием выпускается брошюра **М. В. Лурье и Б. И. Александрова «Задачи на составление уравнений».** В ней выделяются и рассматриваются классы задач на составление уравнений, объединенные общей идеей, анализируются особенности этих классов, показываются приемы решения задач каждого класса и дается методика решения более сложных задач. Книга содержит много задач для самостоятельного решения с ответами. Для нового издания материал пересмотрен с учетом изменений, происшедших в школьной программе по математике. Приводится много примеров, взятых в основном из письменных работ по математике, предлагавшихся в последние годы поступающим в МГУ.

Предназначена для абитуриентов вузов, школьников, учителей и любителей математики.

Программе по алгебре для VII—IX классов средней школы соответствует книга **С. М. Никольского** и **М. К. Потапова «Алгебра. Пособие для самообразования»**. Она выпускается вторым изданием. В книгу добавлен ряд тем: производные линейной и квадратичной функций, показательная и логарифмическая функции, десятичные логарифмы, тригонометрические формулы, начала программирования. Упрощено и улучшено изложение ряда разделов. К каждой главе добавлены исторические сведения. Рассчитана на поступающих в вузы и техникумы, учителей, студентов пединститутов.

Основные сведения об обучении с помощью компьютера содержит книга **Н. П. Брусенцова «Микрокомпьютерная система обучения "Наставник"»**. В ней рассказывается о принципах, устройстве и методах использования этой микрокомпьютерной системы. Предназначена для школьников старших классов и преподавателей.

Основы программирования на Бейсике, Фортране IV и Пл /I излагаются в книге **А. А. Пярнпуу «Основы программирования на алгоритмических языках»**. Специальная глава в ней содержит общие сведения о развитии ЭВМ, совершенствовании алгоритмических языков и принципов решения задач на ПЭВМ. Рассматриваются особенности входных языков некоторых широко используемых трансляторов. Рассчитана на студентов вузов, преподавателей, учащихся старших классов средней школы.

Шестым изданием выпускается **«Справочник по математике для научных работников и инженеров» Т. Корн и Г. Корна.** Он содержит теоретические сведения из всех основных разделов математики и представляет собой достаточно полное изложение математических определений, теорем и формул. Предназначен для специалистов, использующих в своей работе математические методы, в том числе для студентов и преподавателей университетов и пединститутов, учителей средней школы.

Серия «Справочная математическая библиотека» пополнится двухтомным справочником **«Общая алгебра»** под редакцией Л. А. Скорнякова. Первый том содержит разделы: отношения, отображения, частично упорядочные множества, группы, кольца, модули, линейные алгебры. Во второй том включены: полугруппы, решетки, булевы алгебры, универсальные алгебры, категории. Кроме основных определений авторы стремились ограничиться изложением результатов, которые могут быть полезны за пределами рассматриваемой области алгебры. Доказательства не приводятся. Рассчитан на преподавателей и студентов университетов и пединститутов и учителей средней школы.

## Научно-популярная литература

Третьим изданием выпускается книга **В. И. Арнольда «Теория катастроф»**. В ней просто и доступно разъясняется сущность этой теории, излагаются результаты математических теорий особенностей и бифуркаций и их приложения. Предназначена для школьников старших классов, учителей, студентов и преподавателей пединститутов.

Ряд очерков — новелл, связанных с математикой, включены в книгу **Дж. Литлвуда «Математическая смесь»**. Читатели познакомятся с автобиографическими заметками, небольшими исследованиями по истории математики, с популярным рассмотрением вопросов, относящихся обычно к высшей математике, интересными задачами и просто математическими шутками. Рассчитана на школьников старших классов, преподавателей математики, студентов désинститутов.

Результаты, в основном полученные авторами, излагаются в книге **Л. А. Петросяна** и **Б. Б. Рахсиева «Преследование на плоскости»**. В ней приводятся решения задач преследования на плоскости в полуплоскости, в угле, в треугольнике с одним и несколькими преследователями, действующими как один игрок, преследования с «линией жизни» и т. д. Предназначена для учащихся старших классов и преподавателей.

Олимпиадам для школьников, проводившимся в 1984—1987 гг., посвящена книга **А. Л. Брудно** и **Л. И. Каплана «Московские городские олимпиады по программированию»**. В ней изложены методические основы организации и проведение олимпиад, приведены задачи с решениями, наиболее типичные задачи подверглись подробному разбору. Рассчитана на школьников старших классов и преподавателей.

В книге **Г. В. Сениина «Персональный компьютер для новичка»** описывается устройство ПК и даются базовые навыки для работы на нем. Основное внимание автор уделяет решению различных информационных задач на персональном компьютере, а среди них центральное место отводит вопросам текстовой обработки. В книге рассматривается несколько конкретных программ для ПЭВМ типа ЕС 1840 и операционной системы MS — DOS (Альфа-Дос). Приводятся типичные «тупиковые» ситуации при работе на персональном компьютере и советы по их преодолению. Предназначена для владельцев ПК, преподавателей средней школы, старшеклассников.

В серии «Библиотечка „Квант"» выходит вторым изданием книга **А. Н. Колмогорова, И. Г. Журбенко** и **А. В. Прохорова «Введение в теорию вероятностей»**. В ней на простых примерах вводятся основные понятия этой теории. Наряду с комбинаторным определением вероятности рассматривается статистическое определение. Подробно анализируется случайное блуждание иа прямой, описывающее физические процессы одномерного броуновского движения частиц, а также ряд других примеров. Рассчитана на школьников, студентов, преподавателей и лиц, занимающихся самообразованием.

**Обращаем внимание читателей, что на все перечисленные издания книжные магазины принимают заказы без всякого ограничения. Желающие могут выписать эти книги по почте из магазина № 3 «Академкнига» «Книга — почтой». Его адрес: 117393, Москва, ул. Академика Пилюгина, 14, корпус 2.**

**Н. И. Шушанский** (Москва)

# Новые книги

### Монографии. Учебники и пособия для вузов

**Банди Б. Основы линейного программирования** / Пер. с англ.— М.: Радио и связь, 1989.— 176 с.— 70 к., 50 000 экз.

**Виленкин Н. Я., Мордкович А. Г., Куницкая Е. С. Математический анализ. Интегральное исчисление:** Учеб. пособие для студ.-заочн. 2-го курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов.— 2-е изд., перераб.— М.: Просвещение, 1988.— 192 с.— 40 к., 27 000 экз.

**Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа:** Для вузов: В 3 т.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Высшая школа, 1989. Т. 3.— 352 с.— 95 к., 65 000 экз.

**Микиша А. М., Орлов В. Б. Толковый математический словарь:** Основные термины. Ок. 2500 терминов — 2-е изд., стереотип.— М.: Русский язык, 1989.— 242 с.— 90 к., 150 000 экз.

**Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия:** Введение / Пер. с англ.— М.: Мир, 1989.— 478 с.— 2 р. 80 к., 10 000 экз.

**Ускова О. Ф., Вощинская Г. Э. Алгоритмический язык:** Задачи и решения.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 1989.— 184 с.— 35 к., 10 000 экз.

**Хоггер К. Введение в логическое программирование** / Пер. с англ.— М.: Мир, 1988.— 348 с.— 1 р. 90 к., 15 000 экз.

**Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного:** Для вузов.— 3-е изд., испр.— М.: Наука, 1989.— 464 с.— 1 р., 126 000 экз.

**Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии:** В 2 т. / Подготовлены к печати Р. Курантом, О. Нейгебауером; Пер. с нем.— М.: Наука, 1989. Т. 1.— 454 с.— 2 р. 50 к., 23 000 экз.

### Учебники для средних учебных заведений

**Куланин Е. Д., Лемешко Н. Н., Шамуршин В. Л. Микрокалькуляторы в курсе математики:** Сборник задач. Для средних специальных учебных заведений.— М.: Высшая школа, 1989.— 174 с.— 30 к.

**Погорелов А. В. Геометрия:** Учебное пособие для 7—11 классов средней школы.— 8-е изд.— М.: Просвещение, 1989.— 302 с.— 60 к., 2 025 000 экз.

**Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии.**— М.: Наука, 1989.— 286 с.— (Б-ка математического кружка).— 75 к., 163 000 экз.

### Научно-популярные книги

**Попов Ю. П., Пухначев Ю. В. Математика в образах.**— М.: Знание, 1989.— 207 с. (Народный ун-т. Естественнонауч. фак.).— 65 к., 80 000 экз.

**Шилейко А. В., Шилейко Т. И. Беседы об информатике.**— М.: Молодая гвардия, 1989.— 268 с.— (Эврика).— 90 к., 100 000 экз.

### Книги для учителя

**Автономова Т. В., Аргунов Б. И. Основные понятия и методы школьного курса геометрии:** Книга для учителя.— М.: Просвещение, 1988.— 127 с.— 20 к., 100 000 экз.

**Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10 класса:** Пособие для учителя / Б. М. Ивлев, С. М. Саакян, С. И. Шварцбурд.— 2-е изд., перераб.— М.: Просвещение, 1988.— 141 с.— 15 к., 868 000 экз.

**Дидактические материалы по математике для 9 класса вечерней (сменной) школы:** Пособие для учителя / С. Т. Макейчик и др.— 2-е изд., перераб.— М.: Просвещение, 1988.— 127 с.— 20 к., 77 000 экз.

**Осинская В. Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике:** Книга для учителя.— Киев: Радянська школа, 1989.— 191 с.— 30 к., 45 000 экз.

**Ф. М. Шустеф** (Минск)

# Межвузовский семинар в Улан-Удэ

Л. А. Туровинина (Москва)

Четвертый межвузовский семинар по проблеме профессионально-педагогической направленности преподавания математики в педвузах проходил в апреле 1989 г. в Улан-Удэ. Тема семинара — «Формирование элементов методической культуры учителя математики в процессе преподавания специальных дисциплин». В течение трех дней более 70 преподавателей из 25 высших педагогических учебных заведений страны обсуждали вопросы, связанные с оценкой подготовленности выпускников вузов к творческой работе в школе.

Пленарное заседание было посвящено обсуждению теоретических предпосылок формирования понятия «методическая культура». Предварительное обсуждение вопроса о методической культуре учителя математики проводилось во многих пединститутах — соисполнителях республиканской темы. *Р. А. Майер* (Красноярск) изложил концепцию преподавателей Красноярского пединститута по поводу принципов определения понятия культуры вообще и методической культуры в частности. Определение понятия «методическая культура», перечень составляющих его знаний, умений, навыков учителя математики предложил *К. Г. Керимов* (Махачкала). Роли прикладной математики в структуре методической культуры учителя было посвящено выступление *М. М. Шамсутдинова* (Казань). По его мнению, методическая культура включает в себя владение конкретными знаниями, умениями, навыками в различных областях. *И. Д. Пехлецкий* (Пермь) считает, что к таким знаниям и умениям нужно отнести знания о трудности и сложности учебного материала. В его докладе говорилось об обучении студентов определению трудности и сложности математических текстов. В выступлении *Л. В. Шкериной* (Красноярск) были обозначены группы знаний, умений, навыков, необходимых для оценки уровня методической культуры, и изложены результаты социологического опроса выпускников — стажеров КГПИ. Докладчик отметила, что у большинства молодых учителей завышена самооценка сформированности методических умений и навыков.

Вопросы формирования методической культуры учителя математики в различных курсах педвузов и университетов обсуждались на секциях математического анализа, алгебры, геометрии, методики преподавания математики.

Способам формирования в основных математических курсах элементов методической культуры учителя математики было посвящено заседание «круглого стола», организованного по инициативе участников семинара после завершения работы секций.

В последний день работы семинара шел разговор о формировании отдельных элементов методической культуры. Содержательные доклады представили преподаватели Бурятского пединститута. *М. Н. Очиров* предложил пути подготовки студентов к развитию математической культуры школьников, высказал мнение о соотношении математической культуры школьника, математической и методической культуры студента и учителя, о необходимости обучения школьников владению математическим языком. Доклад *В. А. Костеева* был посвящен роли истории математики в формировании математической культуры учащихся и обучении студентов выбору методов изложения учебного материала. В выступлении *А. В. Завьялова* рассматривался вопрос формирования математических понятий в курсах физики и математического анализа, были предложены принципы формирования математической и методической культуры студентов.

Большой интерес вызвал доклад *О. И. Плакатиной* (Иркутск) об экспериментальной программе объединенного курса элементарной математики с методикой ее преподавания. Речь шла о проекте программы, рассчитанной на пятилетний срок обучения студентов-математиков. Данный курс призван решить задачи возможно более ранней ориентации на профессию учителя математики, формирования профессиональных умений с первых шагов обучения в вузе, формирования в единстве методической и математической культуры студентов на базе школьного курса математики. *Л. А. Одинцова* (Барнаул) поделилась опытом использования школьных учебников на лекциях по математическому анализу с целью формирования элементов методической культуры будущего учителя. *С. В. Коржакова* (Челябинск) предложила систему подготовки студентов к обучению формирования понятий у школьников, рассказала о проведении спецкурса по психолого-дидактическим основам формирования математических понятий. С большим вниманием был выслушан доклад *Б. Д. Пайсона* (Барнаул) о выборе целесообразного уровня строгости при изложении материала.

Моделированию в педагогической практике посвятил доклад *Р. А. Гильманов* (Казань). Докладчик считает, что количественная оценка качества дидактических материалов — важная часть методической культуры, и убежден в необходимости владения каждым учителем методикой оценивания трудности и сложности учебного материала. Учитель должен уметь из нескольких учебников выбрать наиболее приемлемый для решения конкретных педагогических задач.

В заключение руководитель семинара *А. Г. Мордкович* (Москва) отметил, что цель семинара в основном достигнута, но проблема формирования методической культуры учителя математики нуждается в дальнейшей разработке.

Следующий семинар будет посвящен обсуждению вопросов, связанных с учебными планами и программами основных курсов педвуза.

# Памяти В. А. Ефремовича

1 мая 1989 г. скоропостижно скончался выдающийся математик и педагог Вадим Арсеньевич Ефремович.

В. А. Ефремович родился 16 октября 1903 г. в г. Жмеринке в семье офицера. В 1920 г. поступил в Московский университет (и одновременно в Московское высшее техническое училище). В студенческие годы начал заниматься топологией под руководством сначала П. С. Урысона, а после его трагической гибели — П. С. Александрова и с тех пор буквально до последних дней жизни оставался творчески работающим ученым — редкий пример научного долголетия. Он был создателем равномерной топологии (сам он предпочитал называть ее геометрией близости), в которой роль, принадлежащую в обычной топологии непрерывным отображениям, играют равномерно непрерывные. Это позволило ему, в частности, получить фундаментальный результат, проясняющий качественное различие между пространством Евклида и пространством Лобачевского: оказалось, что они представляют собой разные пространства близости (хотя топологически не различаются). В поздние годы его интересовали больше всего отношения между метрикой и топологией. Хотя он не входил ни в какую научную школу и всегда занимался тем, что интересовало его самого, а не кого-то другого, ряд его работ (прежде всего по равномерной топологии) получил всемирное признание; идеям, содержащимся в этих и других его работах, наверняка предстоит еще долгое развитие.

Кроме таланта ученого у Вадима Арсеньевича был встречающийся много реже талант популяризатора. Написанные им — одним и в соавторстве с другими — популярные книги и статьи пробуждают у молодых людей интерес к математике уже больше полувека; многим они помогли найти свое призвание. Он, как никто, умел изложить трудный материал на строгом и современном уровне и в то же время понятно и увлекательно.

И еще одним ярким талантом В. А. Ефремовича был педагогический. Преподавание занимало в его жизни не меньше места, чем наука. Педагогическая деятельность Вадима Арсеньевича началась в Московском университете (где среди его учеников был Л. С. Понтрягин); связь с МГУ он сохранял до конца жизни, читая там спецкурсы и руководя семинарами (последний спецкурс он начал осенью 1988 г. и не успел дочитать). Потом ему пришлось преподавать в разных вузах; много лет он занимался подготовкой учителей, работая в Смоленском, Ивановском и Шуйском педагогических институтах. Всего за четыре дня до смерти он провел несколько часов, придумывая оригинальные задачи по элементарной геометрии для студентов. Его волновало все, что касается школы, и в особенности, конечно, то, как преподается там математика. Снижение уровня преподавания математики в школах и пединститутах, халтура и «борьба за успеваемость» возмущали его до глубины души. Год назад в журнале «Математика в школе» была опубликована статья, написанная им совместно с И. А. Вайнштейном, в которой очень убедительно, на конкретных примерах показано, что «учитель должен глубоко и *профессионально* знать современную математику, иметь *личный* интерес к каким-то ее разделам».

Очень много работал Вадим Арсеньевич и непосредственно со школьниками. Все восемь лет, которые он проработал в Иванове (1949—1957), он был главным организатором математических олимпиад; их участники вспоминают, что каждая олимпиада была праздником. Он делал все: и подбирал задачи, и проводил саму олимпиаду, обращаясь своим необыкновенно звонким голосом к сотням ребят, собравшихся в огромном зале, и покупал на свои деньги книги для награждения победителей. Лекции для школьников он читал регулярно до последнего года жизни. Среди школьников он постоянно находил новые таланты; не все они становились математиками, но для каждого встреча с Вадимом Арсеньевичем была важным, часто решающим событием в жизни.

Его вообще всегда окружали ученики самого разного возраста, для которых он был не только научным руководителем или учителем математики, но и образцом лучших человеческих качеств. Об этих качествах следует сказать подробнее, потому что просто как человек Вадим Арсеньевич заслуживает не меньшего восхищения, чем как ученый и педагог, да и невозможно отделить в нем ученого и педагога от «просто человека».

Жизнь В. А. Ефремовича пришлась на тяжелое и страшное время, и бедствия этого времени не обошли его стороной. Достаточно сказать, что он провел семь лет в сталинских тюрьмах и лагерях. И в эту эпоху всеобщего унижения он всегда держался независимо, никогда не гнулся, не кривил душой, не шел ни на какие сделки с совестью. От природы он был очень добрый и мягкий человек, но в принципиальных вопросах становился удивительно твердым. Когда нужно было кому-нибудь помочь, он не думал о себе. Вот характерный случай. В 1957 г. один аспирант Ивановского пединститута — математик, но не его ученик,— выступая на литературном диспуте, нарисовал картину состояния нашей школы, довольно далекую от официальной идиллии. Это вызвало гнев начальства, и возник вопрос о его отчислении из аспирантуры. Тогда Вадим Арсеньевич пошел к директору и сказал, что, если это будет сделано, он уйдет из института. Но аспиранта все-таки отчислили, и Вадим Арсеньевич ушел. Всего ему пришлось уходить с работы не по своей воле шесть раз. (Он говорил: «Бывает четырехтрубный крейсер, а я шеститрубный — шесть раз вылетал в трубу».)

Интересы В. А. Ефремовича были очень широки. Он живо интересовался литературой — и классической и современной, в том числе той, которая только в последние годы его жизни вышла из-под запрета. (Машинописный экземпляр «Доктора Живаго» он получил от самого автора.) При этом его научные интересы не лежали, как очень часто теперь бывает, «на разных полках» с общечеловеческими. Математика была для него составной частью культуры. Его глубоко волновали ее философские вопросы, внутренние связи; его основные математические интересы и основные достижения были связаны с глубокими методологическими проблемами, такими, как строение пространства и классификация преобразований, промежуточных между метрическими и топологическими (он выделял три основных класса таких преобразований: близостные, равномерные и Липшицевы).

Он был очень интересным собеседником. Выдающийся лингвист П. С. Кузнецов (1899—1968), яркий представитель той блестящей российской гуманитарной культуры, о которой нынешнее молодое поколение знает только из книг, писал в своих воспоминаниях, что, работая в 1930—1931 гг. в Смоленске, он «очень радовался, когда приезжал Ефремович». И до последних дней Вадим Арсеньевич доставлял радость всем, кто оказывался близко к нему. Дома у него всегда бывало много друзей, знакомых и учеников.

Долгое время он жил в деревянном домике, уцелевшем вместе с несколькими соседними посреди Сокольнического парка (потом его, конечно, все-таки снесли, и пришлось переехать в обычную квартиру). Домик этот казался удивительным островком прошлого в нынешней Москве. Внутри все было старомодно и просто; рядом был крохотный садик, где Бронислава Владимировна, его жена, высаживала какие-то особенные растения, привезенные из путешествий. Вадим Арсеньевич очень любил путешествовать и вместе с женой объездил множество уголков страны вплоть до самых дальних. С заграничными путешествиями такому человеку, как Вадим Арсеньевич, было, разумеется, труднее; но когда ему уже на 86-м году жизни представилась возможность съездить на два месяца в ФРГ, он ею воспользовался (и делал там научные доклады — по-немецки, хотя никогда раньше не бывал в Германии).

Но, может быть, самыми прекрасными качествами Вадима Арсеньевича были простота и абсолютно искренняя, без тени рисовки, скромность. Одному из пишущих эти строки довелось сорок с лишним лет назад участвовать в учебном семинаре по топологии для начинающих, который вел тогда Вадим Арсеньевич в Московском университете. Он был со всеми прост и дружелюбен, и по тому, как он держался, невозможно было догадаться, что это человек с большими научными заслугами. Его занимало только объяснение предмета; его собственное положение в математическом мире было ему, по-видимому, вполне безразлично. Он как будто ставил себя вместе с молодыми участниками семинара в равное положение перед суверенным величием науки. Точно так же и в поздние годы роль «мэтра» была ему совершенно чужда. Говоря о близких ему научных проблемах, в изучение которых он внес решающий вклад, неизменно подчеркивал заслуги своих предшественников и последователей, а о своих собственных упоминал не то чтобы неохотно, но как-то мимоходом.

Ни в каком возрасте он не стеснялся учиться у молодых коллег новому математическому языку. На ивановских олимпиадах он вместе со студентами и аспирантами обслуживал школьников в раздевалке; в этом не было для него ничего особенного, и делал он это, конечно, не из воспитательских соображений, а просто для того, чтобы скорее начать работу. Даже на девятом десятке он не принимал привилегий, на которые ему давал право возраст. Помогать людям было для него естественной потребностью, проявлявшейся не только в особых случаях, но и в повседневных мелочах и относившейся не только к людям его круга.

Простота в обращении дополнялась у Вадима Арсеньевича простотой привычек и редкостным безразличием к бытовым удобствам и вообще к вещам. Его неприхотливость в быту (не имевшая, впрочем, ничего общего с аскетизмом) часто вызывала удивление окружающих. Это пренебрежение всем внешним позволяло ему сосредоточиваться на внутренней, духовной стороне жизни; и оно же, без сомнения, помогло ему выдержать все испытания и сохранить завидное душевное и физическое здоровье в буквальном смысле до последнего дня.

Вадим Арсеньевич Ефремович прожил, несмотря на все, что ему пришлось перенести, прекрасную, богатую жизнь. Он был интеллигент в старом, почти забытом уже смысле этого слова. Много людей испытали его влияние, они передадут это влияние другим, и, если тонкой ниточке человечности, разума и культуры, как мы надеемся, не суждено порваться, его заслуга в этом будет очень велика.

**А. В. Гладкий, А. С. Грек, А. И. Фет**

# КОМПЬЮТЕР СТРОИТ ГРАФИК

Компьютер открывает качественно новые возможности в работе с графиками функций: он быстро строит их на экране дисплея. Нужна лишь универсальная программа, пригодная для самых различных функций. Здесь, однако, возникает сложность, связанная с областью определения функции. Конечно, ее можно задавать компьютеру в процессе диалога, но это лишняя работа, а значит, возможны и лишние ошибки.

Более эффективным является использование специальных операторов обработки ошибок, если таковые имеются в данной версии языка программирования. Например в MSX-бейсике для ПЭВМ «Ямаха» таким оператором является ON ERROR GOTO. После имени этого оператора указывается номер строки, которой передается управление в случае обнаружения ошибки. Для возобновления работы программы в ней необходимо предусмотреть оператор RESUME и после него указать номер строки, с которой должно продолжаться выполнение программы.

Использование этих операторов позволяет составить универсальную программу для построения графиков функций, при работе с которой можно не беспокоиться об области определения — компьютер учитывает ее сам. Такая программа представлена ниже. В строке 30 находится оператор, задающий функцию, график которой надо построить,— ее аналитическое выражение следует записать в программе вместо «. . .». В строке 20 — оператор ON ERROR GOTO 170 означает, что в случае обнаружения ошибки управление будет передано строке 170. Но здесь расположен оператор RESUME 150 и, значит, программа немедленно возобновится, причем со строки 150, т. е. перерывов в работе практически не будет. В строке 10 задан цвет фона и переднего плана изображения. В строке 160 оператор GOTO 160 предназначен для удержания получившейся картинки-графика на экране («зацикливание программы»). Без него картинка только мелькнула бы на экране.

```
10 COLOR 1, 15, 15
20 ON ERROR GOTO 170
30 DEF FNF(X)= ...
40 SCREEN2
50 REM Построение осей координат
60 LINE (128, 20)—(128, 171)
70 LINE (126, 23)—(128, 20): LINE (130, 23)—(128, 20)
80 LINE (126, 71)—(130, 71)
90 LINE (0, 96)—(255, 96)
100 LINE (252, 94)—(255, 96): LINE (252, 98)—(255, 96)
110 LINE (153, 94)—(153, 98)
120 REM Построение графика функции
130 FOR X=0 TO 255
140 PSET (X, 96—25*FNF ((X—128)/25))
150 NEXT X
160 GOTO 160
170 RESUME 150
```

45 коп. 13-84 Индекс 70557

В строках 130—150 находится цикл для построения графика функции. Поскольку выбран экран с разрешающей способностью 255$\ast$191 точек (он задан оператором SCREEN 2 в строке 40), параметр X (значение аргумента) изменяется от 0 до 255. В строке 140 находится оператор PSET для построения точек графика. В скобках указаны координаты точек на экране дисплея. Вторая координата вычисляется по формуле

$$\mathrm{Y}=96-25 \ast \mathrm{FNF}((\mathrm{X}-128)/25).$$

У компьютера началом координат считается точка в левом верхнем углу экрана, а мы в качестве начала координат выбрали центр экрана. Поэтому пришлось ввести поправочные параметры 96 и 128. Кроме того, за единицу масштаба принят отрезок, содержащий 25 точек экрана,— отсюда число 25 в данной формуле.

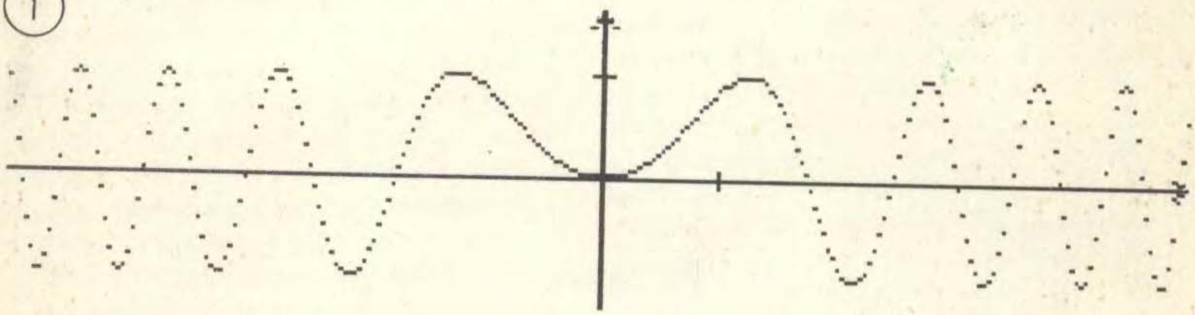
Остальные операторы предназначены для вычерчивания осей координат. После окончания работы по программе необходимо нажать одновременно клавиши CTRL, STOP.

Построим график функции $y=\sin x^2$. Для этого вызовем на экран строку 30 с помощью команды LIST 30 и вместо «. . .» запишем SIN(X $\wedge$ 2). Выполнение программы приводит к построению графика на экране дисплея (рис. 1).

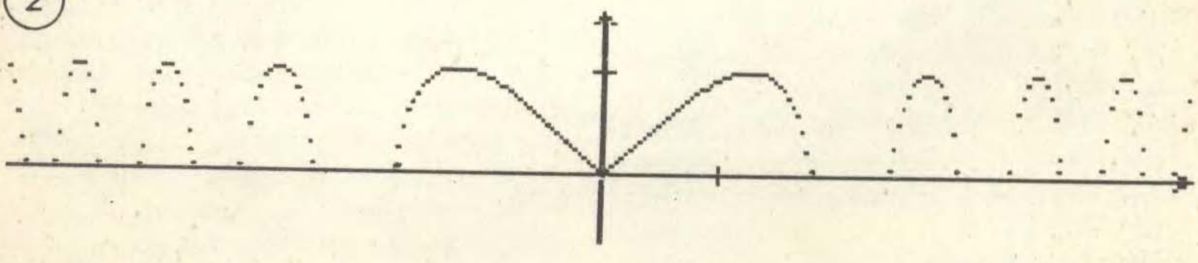
Построим теперь график функции $y=\sqrt{\sin x^2}$, которая не определена при тех $x$, где $\sin x^2 < 0$. Для этого в строке 30 вместо многоточия запишем SQR(SIN($X \wedge$ 2)). Получим график, изображенный на рис. 2.

**В. М. Оксман** (Москва)

1



2



ISSN 0130—9358. Математика в школе, 1989, № 5, 1—160